

UMA EQUAÇÃO PARA O CÁLCULO DO ATRITO ENTRE FASES EM ESCOAMENTOS TURBULENTOS ESTRATIFICADOS EM TUBULAÇÕES CIRCULARES

Paula Thamy Costantini Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Daniel Onofre de Almeida Cruz.

Rio de Janeiro
Agosto de 2017

UMA EQUAÇÃO PARA O CÁLCULO DO ATRITO ENTRE FASES EM ESCOAMENTOS
TURBULENTOS ESTRATIFICADOS EM TUBULAÇÕES CIRCULARES

Paula Thamy Costantini Silva

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM
ENGENHARIA MECÂNICA.

Examinada por:

Prof. Daniel Onofre de Almeida Cruz, D.Sc.

Prof. Paulo Couto, Dr. Eng.

Prof. Juliana Braga Rodrigues Loureiro, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

AGOSTO DE 2017

Silva, Paula Thamy Costantini

Uma Equação Para O Cálculo Do Atrito Entre Fases
Em Escoamentos Turbulentos Estratificados Em
Tubulações Circulares/ Paula Thamy Costantini Silva –
Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2017.

XII, 73 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Daniel Onofre de Almeida Cruz

Dissertação (Mestrado) – UFRJ/COPPE/ Programa de
Engenharia Mecânica, 2017.

Referências Bibliográficas: p. 60-63.

1. Introdução. 2. Revisão Bibliográfica. 3. Conceitos
Fundamentais. 4. Escoamentos Multifásicos. 5.
Desenvolvimento do Trabalho. 6. Análise dos Resultados.
I. Cruz, Daniel Onofre de Almeida. II. Universidade Federal
do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia
Mecânica. III. Título.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que de alguma maneira me ajudaram na realização desse trabalho. À minha família, que está sempre do meu lado, aos meus amigos, que me ajudaram durante todo o mestrado e, principalmente, ao meu orientador Daniel Onofre, pelo suporte, disponibilidade e atenção.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

UMA EQUAÇÃO PARA O CÁLCULO DO ATRITO ENTRE FASES EM ESCOAMENTOS TURBULENTOS ESTRATIFICADOS EM TUBULAÇÕES CIRCULARES

Paula Thamy Costantini Silva

Agosto/2017

Orientador: Daniel Onofre de Almeida Cruz

Programa: Engenharia Mecânica

O escoamento multifásico de fluidos está presente em diversas áreas da indústria. A modelagem desses escoamentos é, assim, imperativa para a engenharia. Na literatura, existem diversos métodos para o cálculo da perda de pressão em tais processos. Esses métodos envolvem os chamados fatores de atrito, parâmetros dependentes das condições do escoamento e das propriedades dos fluidos. O fator de atrito interfacial representa a tensão de atrito gerada pela interação entre fluidos, e é calculado atualmente através de correlações de caráter empírico, não descrevendo de forma satisfatória o fenômeno. Sendo assim, o objetivo deste trabalho foi introduzir uma nova correlação para o fator de atrito interfacial entre gás e líquido para escoamentos estratificados, baseada em considerações físicas que possa ser aplicada em uma gama maior de condições de escoamento. Comparações do modelo proposto com resultados experimentais mostraram boa concordância.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

AN EQUATION FOR THE INTERFACIAL FRICTION FACTOR BETWEEN PHASES IN
TURBULENT STRATIFIED FLOWS IN DUCTS

Paula Thamy Costantini Silva

August/2017

Advisor: Daniel Onofre de Almeida Cruz

Department: Mechanical Engineering

Multiphase flows are present in several areas of the industry. Modeling these types of flow are, therefore, imperative to engineering. In literature, there are several methods to calculate friction pressure losses in such processes. These methods involve friction factors, parameters that depend on flow conditions and fluid property. The interfacial friction factor represents the friction tension generated from the interaction between fluids, and it is currently calculated through empirical correlations that are not able to describe the physical phenomenon properly. Hence, the main goal of this work was to introduce a new correlation for the interfacial friction factor between gas and liquid for stratified flows, based on physical considerations and that can be applied in a wider range of flow conditions. Comparisons of the proposed model with experimental results showed good agreement.

Sumário

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xii
Capítulo 1	1
1. Introdução	1
1.1. Objetivo	2
1.2. Metodologia	3
1.3. Organização do Texto	4
Capítulo 2	5
2. Revisão Bibliográfica	5
Capítulo 3	11
3. Conceitos Fundamentais	11
3.1. Reologia e Regimes de Escoamento	11
3.2. Parâmetros Adimensionais	12
3.3. Número de Reynolds	13
3.4. Fatores de Atrito	13
Capítulo 4	14
4. Escoamentos Multifásicos	14
4.1. Padrões de Escoamento	14
4.1.1. Escoamento Estratificado	17
4.2. Escoamentos Turbulentos	17
4.3. A Camada Limite Turbulenta e a Lei de Parede	19
Capítulo 5	21
5. Desenvolvimento do Trabalho	21
5.1. Escoamento Bifásico Turbulento Estratificado em Canais	21
5.2. Escoamento Bifásico Turbulento Estratificado em Tubulações	26
5.3. Ponto de Velocidade Máxima	29
5.4. Resumo	30
Capítulo 6	31
6. Análise dos Resultados	31
6.1. Equação para canais	31
6.1.1. Comportamento do modelo	32
6.1.2. Comparação com modelo de Blasius	35

6.2. Sistema para tubulações.....	37
6.2.1. Comportamento do modelo.....	37
6.2.2. Comparação com outros modelos.....	43
6.2.3. Gráfico do parâmetro de Lockhart-Martinelli.....	50
6.2.4. Cálculos de perda de carga	54
6.2.5. Análise Geral	58
Capítulo 7	59
7. Conclusão	59
8. Referências Bibliográficas	60
Apêndice A – Dedução da lei de parede adimensional	64
Apêndice B – Dedução da conservação de massa adimensional	65
Apêndice C – Dedução da equação do fator de atrito para tubulações.....	66
Apêndice D – Dados de Perda de Carga	69
Apêndice E – Código Matlab.....	72

Lista de Figuras

Figura 4.1: Padrões de escoamento para escoamento horizontal. (Fonte: Brill e Mukherjee, 1999)	15
Figura 4.2: Padrões de escoamento para escoamento vertical. (Fonte: Brill e Mukherjee, 1999)	16
Figura 4.3: A estrutura assintótica da camada limite turbulenta.	19
Figura 5.1: Escoamento bifásico entre placas, com perfil de velocidades na fase gasosa.	21
Figura 5.2: Porções de fluido utilizadas no balanço de forças.....	22
Figura 5.3: Escoamento bifásico em tubulação, com perfil de velocidades na fase gasosa.	26
Figura 5.4: Descrição geométrica da seção circular da tubulação.....	27
Figura 5.5: Resumo dos modelos propostos.	30
Figura 6.1: Mapa de padrão de escoamento para diferentes diâmetros. Comparação modelo de Taitel e Duckler, 1976 (linhas sólidas) e Mandhane et al, 1974 (linhas tracejadas). Escoamento água-ar, 1 atm, 25°C, tubulação horizontal. (Fonte: Taitel e Duckler, 1976)	32
Figura 6.2: Gráfico da variação do fator de atrito com a velocidade de gás, mantendo a velocidade de líquido (0.01 m/s) e frações constantes. Escoamento água-ar, 1 atm, 25°C, canal horizontal com 1.25 cm de altura.....	33
Figura 6.3: Gráfico da variação do fator de atrito com a velocidade de líquido, mantendo a velocidade de gás (0.5 m/s) e frações constantes. Escoamento água-ar, 1 atm, 25°C, canal horizontal com 1.25 cm de altura.	34
Figura 6.4: Gráfico de comparação dos resultados do presente modelo com o modelo de Blasius. Escoamento água-ar, 1 atm, 25°C, canal horizontal com 1.25 cm de diâmetro, velocidade de líquido de 0.01 m/s e velocidades de gás de (a) 0.1 m/s (b) 0.5 m/s e (c) 1 m/s.....	36
Figura 6.5: Gráfico da variação do fator de atrito com a velocidade de gás, mantendo a velocidade de líquido (0.4 m/s) e frações constantes. Escoamento água-ar, 1 atm, 25°C, tubulação horizontal com 30 cm de diâmetro.	37
Figura 6.6: Gráfico da variação do fator de atrito com a velocidade de líquido, mantendo a velocidade de gás (1 m/s) e frações constantes. Escoamento água-ar, 1 atm, 25°C, tubulação horizontal com 30 cm de diâmetro.	38

Figura 6.7: Mapa de padrão de escoamento. Escoamento óleo-gás, 68 atm, 38°C, tubulação horizontal com 5 e 30 cm de diâmetro. (Fonte: Taitel e Dukler, 1976)	39
Figura 6.8: Gráfico da variação do fator de atrito com a velocidade de gás, mantendo a velocidade de líquido (0.4 m/s) e frações constantes. Escoamento óleo-gás, 68 atm, 38°C, tubulação horizontal com 30 cm de diâmetro.....	40
Figura 6.9: Gráfico da variação do fator de atrito com a velocidade de líquido, mantendo a velocidade de gás (1 m/s) e frações constantes. Escoamento óleo-gás, 68 atm, 38°C, tubulação horizontal com 30 cm de diâmetro.....	41
Figura 6.10: Gráfico de comparação dos resultados do presente modelo para escoamentos óleo-gás e água-ar.....	42
Figura 6.11: Gráfico de comparação dos resultados do presente modelo com os modelos de Lockhart-Martinelli e Blasius. Escoamento água-ar, 1 atm, 25°C, tubulação horizontal com 30 cm de diâmetro, velocidade de líquido de 0.4 m/s e frações de gás de (a) 80% (b) 60% (c) 40% e (d) 20%.....	44
Figura 6.12: Gráfico de comparação dos resultados do presente modelo com os modelos de Lockhart-Martinelli e Blasius. Escoamento água-ar, 1 atm, 25°C, tubulação horizontal com 30 cm de diâmetro, velocidade de líquido de 0.014 m/s e velocidades de gás (a) 0.07 m/s (b) 0.015 m/s e (c) 0.042 m/s.	46
Figura 6.13: Gráfico de comparação dos resultados do presente modelo com os modelos de Lockhart-Martinelli e Blasius. Escoamento água-ar, 1 atm, 25°C, tubulação horizontal com 30 cm de diâmetro, velocidade de gás de 0.14 m/s e velocidades de líquido (a) 0.003 m/s (b) 0.007 m/s e (c) 0.03 m/s.	48
Figura 6.14: Gráfico de comparação. Escoamento óleo-gás, 68 atm, 38°C, tubulação horizontal com 30 cm de diâmetro, fração do gás de 60% e Reynolds de 60000.....	49
Figura 6.15: Níveis de líquido em escoamentos estratificados bifásicos para $fifSG = 1$. (Crowley e Rathe, 1988)	52
Figura 6.16: Níveis de líquido em escoamentos estratificados bifásicos.	53
Figura 6.17: Região dos dados para o escoamento água-ar no mapa de Taitel e Dukler (1976). (Badie <i>et al</i> , 2000)	55
Figura 6.18: Comparação dos dados experimentais de Badie <i>et al</i> (2000) para escoamentos água-ar com os valores calculados utilizando o modelo apresentado.....	55
Figura 6.19: Comparação dos dados experimentais de Badie <i>et al</i> (2000) para escoamentos óleo-ar com os valores calculados utilizando o modelo apresentado.....	56

Figura 6.20: Comparação dos dados experimentais de Badie *et al* (2000) com os valores calculados utilizando o modelo apresentado com a introdução da energia de ondas..... 57

Lista de Tabelas

Tabela 2.1 – Correlações para o cálculo do fator de atrito interfacial	8
Tabela 6.1 – Propriedades dos fluidos considerados.	39
Tabela D.1 – Dados experimentais utilizados para os cálculos de perda de pressão em escoamento água-ar.....	69
Tabela D.2 – Dados experimentais utilizados para os cálculos de perda de pressão em escoamento óleo-ar.	70

Capítulo 1

1. Introdução

Fluidos são substâncias que apresentam baixa resistência a tensões de cisalhamento. São aquelas que em teoria se deformam continuamente quando submetidas a esforços tangenciais. O estudo da mecânica dos fluidos engloba diversas situações que se apresentam tanto no cotidiano, como na indústria. Sendo assim, seu estudo é importante no sentido que busca descrever fenômenos físicos e aplicar conhecimentos na solução de problemas tecnológicos.

O contínuo avanço da tecnologia introduz desafios cada vez maiores para a indústria. A redução de recursos, preocupação com meio ambiente, busca por crescimento impulsionaram uma visão mais crítica sobre eficiência e otimização. A melhoria da eficiência de processos industriais, eliminando desperdícios e investindo em soluções, engloba o entendimento físico dos processos envolvidos em cadeias produtivas.

O escoamento de fluidos está largamente presente em diversos tipos de indústria: na produção de óleo e gás, indústria geotérmica, na operação de reatores nucleares e químicos, em evaporadores e outros tipos de equipamentos de processos. O deslocamento de fluidos gera perdas de carga como consequência do atrito entre o fluido e a superfície da tubulação utilizada, das propriedades do fluido e da interação com outras substâncias presentes no escoamento. Cada sistema de escoamento tem características próprias que variam dependendo da reologia do fluido em questão, da geometria da tubulação, da presença de outros equipamentos na malha de transporte e de fatores ambientais, tanto climáticos quanto geográficos.

Para que haja transporte de maneira eficiente, é necessário fazer uma avaliação e descrição matemática da perda de carga no sistema. Esse tipo de avaliação é útil em todas as fases de um projeto de engenharia. Durante fases de projeto, auxiliarão na determinação de *layouts*, na decisão de quais equipamentos deverão ser incluídos ao sistema para compensar a energia dissipada, assim como no desenvolvimento de procedimentos de segurança e operação. Durante fases de operação, poderá gerar recomendações para a melhoria e otimização de processos.

É comum encontrar nas indústrias, principalmente na produção de petróleo, o escoamento simultâneo de mais um de fluido. Esse tipo de escoamento é denominado escoamento multifásico. O escoamento conjunto de óleo, gás e água traz desafios adicionais para sua predição devido à complexidade física da interação entre os fluidos.

Além disso, em condições de campo, os escoamentos são em sua maioria turbulentos. Escoamentos turbulentos são aqueles de estrutura caótica, nos quais existe uma grande quantidade de escalas à serem modeladas e transferências de massa e calor mais intensas, características que inserem mais dificuldades à modelagem do problema

A simulação de escoamentos multifásicos envolve a resolução numérica das equações de conservação de massa, quantidade de movimento e calor, sendo extremamente dependente de parâmetros do fluido e do próprio escoamento, como por exemplo os fatores de atrito.

Esses fatores de atrito representam a interação entre fluidos e superfícies e entre dois fluidos. São calculados a partir de correlações que dependem das propriedades do escoamento e das propriedades do fluido. Existem na literatura, diversas correlações disponíveis para o cálculo desses fatores de atrito. Contudo, ainda apresentam uma grande deficiência de aplicabilidade, principalmente no caso dos fatores de atrito interfaciais. Estes tipos de parâmetro descrevem a interação no contato entre fluidos e são muito importantes para a determinação correta do atrito e na avaliação de fenômenos como a transição entre padrões de escoamento.

1.1. Objetivo

Em problemas de mecânica dos fluidos, como citado anteriormente, a perda de carga é o quesito mais importante a ser calculado. Está ligada ao dimensionamento de tubulações, transportes à distância, custos de produção, controle hidráulico, dentre outras situações que se apresentam na engenharia. Assim, a melhoria da eficiência e o aprofundamento do conhecimento físico dos fenômenos que regem o escoamento são essenciais para a indústria.

Na literatura, existem diversos métodos para o cálculo do fator de atrito interfacial em escoamentos estratificados. Todos, porém, muito restritos a certas condições de escoamento como exposto pelos próprios autores. A utilização de correlações para o fator

de atrito é essencial para cálculos em engenharia, uma vez que visa simplificar modelos e promover uma análise qualitativa de importantes fenômenos em um escoamento.

Sendo assim, o objetivo deste trabalho é introduzir uma nova correlação para o fator de atrito interfacial entre gás e líquido baseado em considerações físicas que possa ser aplicada em uma gama maior de condições de escoamento. A dedução será realizada a partir de escoamentos estratificados bifásicos em canais e, mais tarde, estendida para escoamentos em tubulações.

1.2. Metodologia

A maioria das correlações atualmente disponíveis são resultantes da avaliação de um conjunto de dados experimentais. Esses dados são obtidos através de condições específicas e não são capazes de representar a vasta possibilidade de cenários encontrados em situações reais. Sendo assim, essas correlações funcionam apenas para casos particulares de escoamento.

Aqui, será adotada uma metodologia mecanicista, que visa inserir maior rigor físico a equação encontrada, para que esta atinja uma variedade maior de condições de problemas de escoamento, ou seja, uma equação que se aplique a variados diâmetros de tubulação e tipos de fluido em casos de escoamentos turbulentos.

Inicialmente, foi realizada uma análise de um escoamento bifásico entre placas visando encontrar uma primeira equação para o fator de atrito. A partir de um balanço de forças na fase gasosa, encontra-se uma relação entre as tensões que será trabalhada com a utilização da lei de parede. A lei de parede é utilizada para escoamentos turbulentos e não tem restrição de tipos de fluido.

Em seguida, a correlação foi estendida para o cálculo do atrito em tubulações circulares através de análise de conservação de massa do sistema, considerando agora a nova geometria do problema.

As equações foram então implementadas em um código de escoamento multifásico para avaliação de aplicabilidade. Por último, foram testadas contra dados experimentais, com o objetivo de determinar com maior precisão sua aplicabilidade e calibrar possíveis aprimoramentos.

1.3. Organização do Texto

O presente texto compreende além desta breve introdução, uma revisão bibliográfica de trabalhos realizados anteriormente sobre fatores de atrito interfaciais, apresentada no capítulo 2. O capítulo 3 descreve o contexto da física necessária para o desenvolvimento do trabalho, apresentando fundamentos teóricos de escoamento multifásico. Em seguida, o capítulo 4 apresenta a proposta do novo equacionamento para o fator de atrito, incluindo as considerações necessárias e seu desenvolvimento matemático. Os resultados obtidos, assim como a comparação com dados experimentais, são os objetos do capítulo 5. Por fim, o capítulo 6 apresenta as principais conclusões obtidas ao realizar este trabalho e as referências bibliográficas utilizadas.

Capítulo 2

2. Revisão Bibliográfica

Em escoamentos multifásicos, o cálculo do atrito entre fases é essencial para a predição de frações de líquido e gradientes de pressão. Além disso, a tensão interfacial está ligada a fenômenos de escoamento como o surgimento de ondas interfaciais (Andreussi *et al.* 1985), o princípio de *slugs* (Taitel e Dukler 1976; Lin e Hanratty 1986) e, principalmente, os processos de transferência de quantidade de movimento, massa e calor em regimes com padrão estratificado (Daly e Harlow 1981; Lee e Bankoff 1983; Kim *et al.* 1985).

O padrão de escoamento estratificado ocorre em baixas velocidades de líquido e gás. Embora seja mais simples, as características de escoamento ainda não são calculadas apropriadamente para fluidos complexos ou escoamentos em alta pressão. O escoamento estratificado ainda pode ser dividido em quatro subregimes (Andritsos e Hanratty, 1987b; Tzotzi *et al.*, 2011; Chen *et al.* 1997; Fernandino e Ytrehus, 2006), sendo eles: (1) escoamento suave com interface lisa; (2) aquele em que há presença de ondas pequenas e regulares, cuja amplitude e comprimento de onda aumentam com a distância da tubulação; (3) presença de ondas irregulares de grandes amplitudes com alta interferência; (4) quando há dispersão de gotas e filamentos líquidos desprendidos das ondas de grande amplitude e o líquido começa a subir pelas paredes, o que leva a interface a apresentar uma aparência côncava. Alguns autores levaram em consideração essa forma alterada da interface em suas modelagens (Vlachos *et al.*, 1999; Chen *et al.*, 1997). A transição entre esses subregimes está ligada a propagação de instabilidades (Kuru *et al.*, 1995; Boomkamp e Miesen, 1996; García *et al.*, 2016).

A primeira correlação amplamente utilizada para o cálculo do gradiente de pressão em escoamentos estratificados foi a de Lockhart e Martinelli (1949), método que previa valores com erros maiores que 100% (Baker, 1954; Hoogendoorn, 1959). Os primeiros métodos mais aprimorados para escoamentos multifásicos foram obtidos considerando o balanço de quantidade de movimento em escoamentos totalmente desenvolvidos (Johannessen, 1972 e Taitel e Dukler, 1976). Taitel e Dukler (1976) representaram as tensões entre fluidos e entre superfícies e fluidos em termos de fatores de atrito. Primeiramente, sugeriram que o fator de atrito na interface entre fluidos fosse igual ao fator

de atrito do gás com a superfície. Avanços na teoria, permitiram a utilização de correlações mais sofisticadas para o cálculo dos fatores de atrito. Existem na literatura diversas equações, empíricas e mecanicistas, para fatores de atrito entre fluidos e superfície, para escoamentos laminares e turbulentos.

Em escoamentos estratificados, a presença de ondas na interface pode causar um aumento significativo na tensão de cisalhamento em comparação com o valor para interfaces lisas, resultando em maiores gradientes de pressão. Claramente a correlação do fator de atrito interfacial tem um papel crucial na modelagem, porém análises de dados revelam que os métodos atualmente disponíveis para seu cálculo ainda são insatisfatórios (Xiao e Shoham, 1991). Uma razão para esse problema pode se encontrar na dedução de tais correlações, muitas delas foram adaptadas de correlações para escoamentos monofásicos sem levar em conta o caráter físico da interação entre dois fluidos. A situação se torna mais complexa pela existência de mais de um padrão de ondas e pelo fato do escoamento não ser bem desenvolvido em baixas velocidades de gás (Taitel e Dukler, 1976). Os diferentes padrões de onda exercem influência também nas transferências de massa e calor na interface dos fluidos.

Como citado anteriormente, Taitel e Dukler (1976) assumiram que o fator de atrito interfacial seria igual ao fator de atrito do gás com a superfície. Essa aproximação se mostrou válida para casos em que a interface é suave, mas subestima os cálculos para interfaces onduladas. Mais tarde, Cheremisinoff e Davis (1979) sugeriram a utilização de valores diferentes dependendo do tipo de ondulações na superfície, sendo eles uma constante no valor de 0.0142 no caso de ondas tridimensionais, baseado nos experimentos de Cohen e Hanratty (1968), e uma correlação empírica para o caso de “*roll waves*”, baseado nos experimentos de Miya *et al.* (1971).

Shoham e Taitel (1984) apontaram que a correlação utilizada por Cheremisinoff e Davis (1979) para o padrão de “*roll waves*” não poderia ser aplicada para escoamentos de alto Reynolds, propondo que se utilizasse o valor constante 0.0142 para todo o regime estratificado ondulado. Esta se mostrou uma boa média para escoamentos com ondas bi e tridimensionais de baixa amplitude.

Já Laurinat *et al.* (1984) chegaram à conclusão através de dados experimentais de escoamentos anulares horizontais que o fator de atrito poderia ser relacionado com a fração de líquido. Pensamento também seguido por Kowalski (1987), que desenvolveu uma

correlação através de experimentos conduzidos em alta pressão. Além da fração de líquido, também relacionou aos valores de Reynolds do gás e do líquido. Outras correlações que também utilizam o número de Reynolds como parâmetro são as de Hart *et al* (1989), para escoamentos horizontais com baixa fração de líquido, e de Kim *et al* (1985), deduzida a partir de escoamentos estratificados contracorrente em canais retangulares.

Andreussi e Persen (1987) também desenvolveram uma correlação através de dados experimentais. Consideraram, porém, um único diâmetro de tubulação variando sua inclinação em diferentes ângulos. Em contrapartida, Bendiksen *et al.* (1989) partiu de um balanço de forças, derivando uma equação para a altura média de ondas na interface em escoamentos estratificados. Essa altura média é usada como rugosidade absoluta da interface.

A maioria das correlações disponíveis na literatura levam a erros quando comparadas com dados experimentais e, segundo estudo realizado por Ouyang e Aziz (1996), dentre elas, as correlações de Andreussi e Persen (1987) e Andritsos e Hanratty (1987a) seriam as melhores escolhas para determinar o fator de atrito interfacial em escoamentos estratificados.

Andritsos e Hanratty (1987a) propuseram um modelo que leva em conta a influência das ondas interfaciais tanto no fator de atrito interfacial, como no fator de atrito superficial do líquido. O modelo foi baseado em um extenso conjunto de dados obtidos em experimentos em tubulações horizontais de diferentes diâmetros com fluidos de diferentes viscosidades. O método consiste em um procedimento iterativo para o cálculo do gradiente de pressão a partir de um valor estimado de fração, no qual a equação de Blasius (White, 1991) é utilizada para o cálculo do atrito do gás, uma correlação proposta calcula o atrito interfacial e o atrito do líquido é encontrado através do balanço de momento.

A correlação proposta para o fator de atrito na interface propõe a utilização do mesmo valor do fator de atrito de gás para velocidades superficiais de gás abaixo de um valor crítico e uma correlação empírica para valores acima do valor crítico. Essa velocidade crítica descreveria o limite no qual aparecem ondas na interface dos fluidos, elevando o atrito dramaticamente, e para sistemas de água-ar teria o valor de 5 m/s em condições atmosféricas. Essa consideração claramente traz resultados superestimados para casos de vazões baixas de líquido e escoamentos de alta pressão e subestimados para altas vazões de líquido, uma vez que nesses casos as velocidades críticas são alteradas.

Em estudos mais recentes, Tzotzi e Andritsos (2013) trabalharam em melhorar o modelo de Andritsos e Hanratty (1987a) através de uma melhor descrição da transição dos subregimes do escoamento estratificado e do aprimoramento da correlação para o fator de atrito interfacial, demonstrando também a aplicabilidade em escoamentos levemente inclinados.

Mesmo sendo um texto recente, porém, ainda utiliza a equação de Blasius (White, 1991) para calcular o fator de atrito do gás com a superfície, sem explorar outras possibilidades. Ainda assim, o modelo represente um grande avanço comparado ao de Andritsos e Hanratty (1987a) já que são levados em conta a presença de três subregimes de ondas e mudanças nas velocidades críticas de transição. Na tabela abaixo estão relacionadas as correlações aqui citadas para o cálculo do fator de atrito interfacial.

Tabela 2.1 – Correlações para o cálculo do fator de atrito interfacial

Equação	Referência
$f_i = f_{SG}$	Taitel e Dukler (1976)
$f_i = 0.008 + 2 \times 10^{-5} Re_L$ $Re_L = \frac{\rho_L Q_L}{\mu_L (P_L + P_i)}$	Cheremisinoff e Davis (1979)
$f_i = 0.0142$	Shoham e Taitel (1984)
$\frac{f_i}{f_{wg}} = \left[2 + \frac{2.5 \times 10^{-5} Re_{sL}}{D} \right] (1 - \alpha_L)^{5/2}$	Laurinat <i>et al.</i> (1984)

Equação	Referência
$f_i = 0.021 + 0.14 \times 10^{-5} Re_L$ $Re_L = \frac{\rho_L Q_L}{\mu_L (P_L + P_i)}$	Kim <i>et al</i> (1985)
$f_i = 7.5 \times 10^{-5} \alpha_L^{-0.25} Re_G^{-0.3} Re_L^{0.83}$ $Re_G = \frac{\rho_G u_G D}{\mu_G} \quad Re_L = \frac{\rho_L u_L D}{\mu_L}$	Kowalski (1987)
$\frac{f_i}{f_{wg}} = 1 + 29.7 (F - 0.36)^{0.67} \left(\frac{h_L}{D} \right)^2$ $F = u_G \sqrt{\frac{\rho_G}{\rho_L - \rho_G} \frac{dA_L}{dh_L} \frac{1}{A_G g \cos \theta}}$	Andreussi e Persen (1987)
<p>Para $u_{SG} \leq u_{SG,t}$: $\frac{f_i}{f_{wg}} = 1$</p> <p>Para $u_{SG} > u_{SG,t}$: $\frac{f_i}{f_{wg}} = 1 + 15 \sqrt{\frac{h_L}{D}} \left(\frac{u_{SG}}{u_{SG,t}} - 1 \right)$</p> <p>Nas quais, $u_{SG,t}$ é a velocidade superficial crítica de transição para interface ondulada</p>	Andritsos e Hanratty (1987a)
$f_i = 9.26 \times 10^{-3} f_{wL} Re_{sL}^{0.726}$ $Re_L = \frac{\rho_L u_{sL} D}{\mu_L}$	Hart <i>et al</i> (1989)

Equação	Referência
$h_w = \frac{1}{2} \left[\frac{\rho_G (u_G - u_L)^2}{2g(\rho_L - \rho_G) \cos \theta} \right]$ $+ \sqrt{\left[\frac{1}{2} \frac{\rho_G (u_G - u_L)^2}{2g(\rho_L - \rho_G) \cos \theta} \right]^2 - \frac{\sigma}{g(\rho_L - \rho_G) \cos \theta}}$ $f_i = h_w / d_{hi}$ <p>Nas quais, h_w é a altura média de ondas e d_{hi} é o diâmetro hidráulico na interface. Quando a expressão na raiz quadrada é negativa, h_w é zero e escoamento estratificado liso é obtido.</p>	<p>Bendiksen <i>et al.</i> (1989)</p>
<p>Para $u_{SG} \leq u_{SG,2-D}$: $\frac{f_i}{f_{wg}} = 1$</p> <p>Para $u_{SG,2-D} \leq u_{SG} \leq u_{SG,K-H}$:</p> $\frac{f_i}{f_{wg}} = 1 + 0.35 \left(\frac{h}{D} \right)^{0.5} (u_{SG} - u_{SG,2-D})$ <p>Para $u_{SG} > u_{SG,K-H}$:</p> $\frac{f_i}{f_{wg}} = 2 \left(\frac{h}{D} \right)^{0.1} \left(\frac{\mu_L}{\mu_w} \right)^{0.1} + 4 \left(\frac{h}{D} \right)^{0.5} (u_{SG} - u_{SG,K-H})$ <p>Nas quais, $u_{SG,2-D}$ e $u_{SG,K-H}$ são as velocidades críticas de transição entre interface lisa, com ondas pequenas e com ondas de alta amplitude</p>	<p>Tzotzi e Andritsos (2013)</p>

Capítulo 3

3. Conceitos Fundamentais

Nesta seção serão apresentados conceitos físicos básicos utilizados ao longo do trabalho para melhor entendimento.

3.1. Reologia e Regimes de Escoamento

A definição de fluidos ou sólidos está ligada ao comportamento de um material quando submetido a uma tensão de cisalhamento. O estudo deste comportamento é denominado reologia e é importante em diversas áreas da indústria, como no dimensionamento de equipamentos ou no controle de qualidade de um produto.

O fenômeno do escoamento ocorre de diferentes maneiras dependendo das características próprias de um material. A propriedade mais comum associada a esse fenômeno é a viscosidade, que determina como um fluido impõe resistência ao cisalhamento. A avaliação dessa propriedade classifica diferentes tipos de fluido de acordo com seu comportamento. A definição de viscosidade foi feita através do estudo dos fluidos newtonianos.

Basicamente existem dois tipos de fluidos, os newtonianos e os não-newtonianos. Os fluidos newtonianos são aqueles nos quais a deformação no fluido é proporcional à taxa de cisalhamento aplicada nele em determinada temperatura e pressão. A constante de proporcionalidade relacionada a este fenômeno foi chamada de viscosidade.

Em contrapartida, os fluidos não-newtonianos são aqueles em que não há proporcionalidade entre taxas de deformação e cisalhamento. A viscosidade, então, varia com a taxa de cisalhamento, podendo ser independente ou dependente do tempo de aplicação da força. É importante notar que qualquer substância que obedecer à estas definições é considerada um fluido e pode ser modelada de acordo, sendo elas substâncias puras ou não.

Outro conceito importante no estudo dos fluidos são os regimes de escoamento. Este se refere a como o escoamento se comporta no que diz respeito a trajetória e direção

das partículas de fluido em movimento. Existem dois regimes de escoamento possíveis: escoamentos laminares e escoamentos turbulentos.

Em escoamentos laminares, as partículas de fluido percorrem trajetórias paralelas bem definidas, se apresentando em camadas. Já em escoamentos turbulentos, há movimento aleatório, descrevendo percursos irregulares, com o surgimento de vórtices no interior do escoamento. No presente trabalho, serão tratados escoamentos turbulentos, descritos detalhadamente mais adiante.

3.2. Parâmetros Adimensionais

Na mecânica dos fluidos, existe o desafio de representar infinitas combinações de propriedades e cenários de uma maneira que torne viável seu estudo teórico e experimental. Nesse sentido, introduz-se o conceito de similaridade.

Cada escoamento possui grandezas características determinadas pelas propriedades físicas do fluido, assim como aspectos de geometria e dinâmica. Essas grandezas podem ser combinadas para formar grupos adimensionais de tal forma que escoamentos os quais possuam os mesmos valores desses grupos sejam dinamicamente semelhantes. Em outras palavras, podemos representar e analisar situações reais em modelos menores experimentais dinamicamente semelhantes.

A metodologia experimental é baseada no teorema Pi de Buckingham, que afirma que se existe uma equação em n dimensões com um certo número x de variáveis físicas, então a equação pode ser reescrita em termos de $p = x - n$ grupos adimensionais construídos a partir das variáveis físicas originais.

Utilizar equações adimensionais é uma importante estratégia na generalização de problemas de escoamento. Existem inúmeras possibilidades para as características de formação de um escoamento, assim, com a utilização de propriedades adimensionais, todos aqueles que possuírem o mesmo valor adimensional, apresentarão os mesmos resultados.

Um dos grupos adimensionais mais utilizados é o número de Reynolds, descrito a seguir.

3.3. Número de Reynolds

O número de Reynolds é o grupo adimensional mais importante da mecânica dos fluidos e pode ser descrito para fluidos newtonianos como:

$$Re = \frac{u L}{\nu} \quad (3.1)$$

Na qual, u é a velocidade do escoamento, L representa um comprimento característico e ν é a viscosidade cinemática do fluido.

O número de Reynolds pode ser interpretado de diversas maneiras. A interpretação mais comum é a de que ele representa a razão entre as forças de inércia e as forças viscosas de um escoamento, sendo importante na determinação de quais regiões possuem efeitos viscosos relevantes.

Suas aplicações variam de escoamentos em tubulação até o escoamento ao redor de um aerofólio. É utilizado para determinar a transição entre regimes laminares e turbulentos, assim como para correlacionar escalas de situações reais com experimentos de laboratório.

3.4. Fatores de Atrito

Fatores de atrito são parâmetros adimensionais locais utilizados para mensurar perdas de carga por atrito em escoamentos. São definidos pela razão entre tensão cisalhante e a densidade de energia cinética local:

$$f = \frac{2\tau}{\rho(u)^2} \quad (3.2)$$

Na equação, τ é a tensão cisalhante, ρ é a massa específica do fluido e u é a velocidade do mesmo.

Esse parâmetro é essencial em cálculos práticos e pode ser representado por correlações empíricas ou mecanicistas dependentes de características do fluido e do escoamento. O atrito calculado pode ser entre fluido e superfície ou entre dois fluidos que escoam em conjunto. Este é o objeto de interesse principal deste trabalho.

Capítulo 4

4. Escoamentos Multifásicos

Em geral, em operações de produção de petróleo, há produção conjunta de água, óleo e gás, podendo o gás ser associado ou livre. Gás associado é o volume de hidrocarbonetos leves que, conforme a mudança de pressão na trajetória do sistema, se desassociam da fase líquida e evaporam. Já o gás livre é aquele já existe na forma de gás dentro do reservatório. O gás livre existe nos casos de reservatórios com pressões abaixo do ponto de bolha.

A modelagem desse escoamento multifásico é fundamental não só para a fase de projeto dos sistemas de produção, mas também é necessária durante o período de operações para prever e mitigar possíveis problemas de garantia de escoamento (deposição orgânica e inorgânica, formação de hidratos, formação de *slugs*, emulsões, espumas, etc.) e otimizar a produção individual dos poços.

Neste trabalho, serão avaliados escoamentos horizontais bifásicos, nos quais existe o escoamento das fases líquida e gasosa, em regime turbulento (altos números de Reynolds) e com padrão estratificado, sem transferência de massa entre as fases. Nesta seção serão apresentados os fundamentos teóricos de escoamentos desse tipo para melhor entendimento.

4.1. Padrões de Escoamento

Dependendo das propriedades do sistema, o escoamento pode assumir diferentes padrões geométricos. Parâmetros físicos que determinam o padrão de escoamento são tensão superficial, que determina a molhabilidade das paredes do duto e a formação de gotas de líquido ou gás, a gravidade, que tende a puxar o líquido para a parte inferior do duto, a tensão interfacial, que descreve a interação entre os fluidos, e a viscosidade, que representa a resistência que o fluido impõe ao escoamento. Esses padrões vão definir o comportamento das fases e dependem principalmente das velocidades das mesmas e das quantidades de líquido e gás. Os padrões de escoamento horizontal estão descritos abaixo.

- **Bolha:** Bolhas dispersas fluem na parte superior do duto. É comum em velocidades muito altas de líquido e baixas relações gás/líquido.
- **Estratificado:** Fases escoam paralelamente. Acontece para baixas velocidades de líquido e gás.
- **Ondulado:** Fases escoam paralelamente com ondas na interface. Pode ser considerado subregime do padrão estratificado. Para velocidades intermediárias do líquido.
- **Golfada ou Slug:** Quando há aumento da velocidade, as ondas rolantes crescem até o ponto de formarem um escoamento com tampões ou golfadas.
- **Anular:** Devido à gravidade, o filme de líquido é mais largo na base. Para velocidades de gás muito altas.

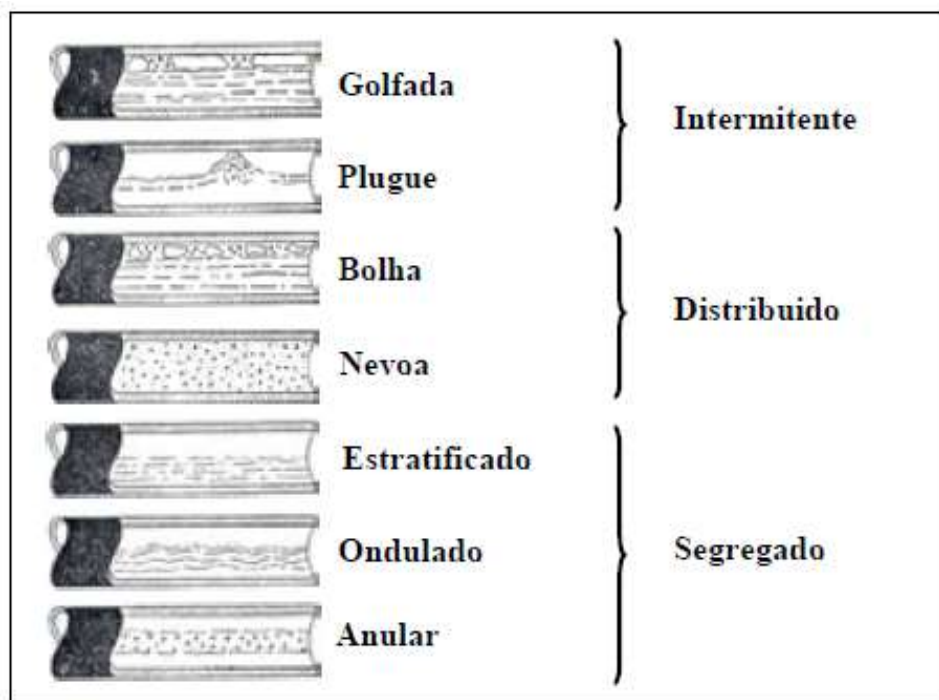


Figura 4.1: Padrões de escoamento para escoamento horizontal. (Fonte: Brill e Mukherjee, 1999)

No caso do escoamento vertical, conforme a quantidade de gás aumenta gradualmente, os padrões de escoamento são:

- **Bolha:** Bolhas de gás estão dispersas em um escoamento contínuo de líquido. As bolhas possuem tamanho aproximadamente uniforme e se movem com

velocidades diferentes. Exceto pela densidade, é pouca a influência do gás gradiente de pressão. A parede do tubo está sempre em contato com a fase líquida.

- **Golfada ou Slug:** O gás flui com formato de “projétil” ou golfada, que quase preenchem a seção transversal do tubo, mas ainda há a presença de bolhas. A velocidade das bolhas de gás é maior que a do líquido e tanto o gás quanto o líquido têm influência significativa no gradiente de pressão.
- **Transição ou Caótico:** Escoamento muito instável de natureza oscilatória. Não existem formas características e ambas as fases têm influência no gradiente de pressão.
- **Anular:** O gás passa a ser a fase contínua e o líquido flui na forma de gotas dispersas no núcleo central gás. A parede do tubo é coberta com um filme líquido, mas a fase de gás tem influência predominante no gradiente de pressão.

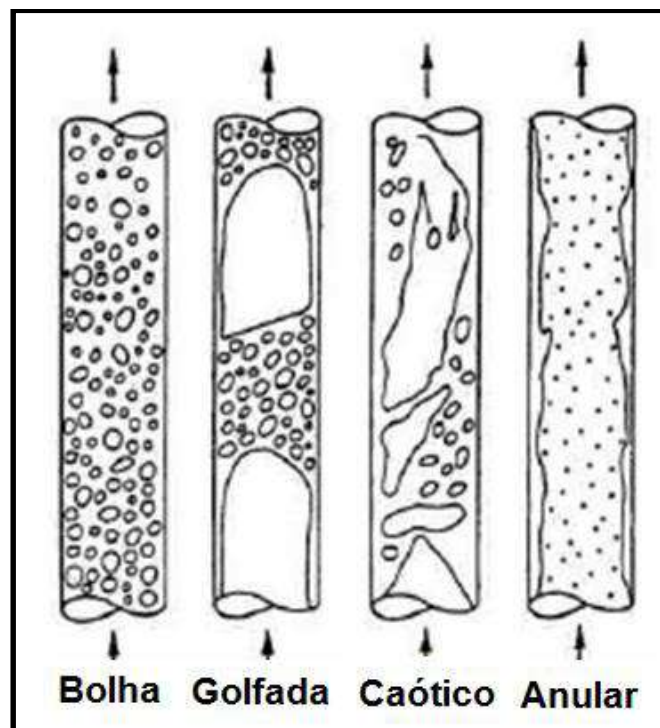


Figura 4.2: Padrões de escoamento para escoamento vertical. (Fonte: Brill e Mukherjee, 1999)

4.1.1. Escoamento Estratificado

Como descrito anteriormente, o padrão estratificado ocorre em escoamentos horizontais, nos quais as fases líquida e gasosa escoam paralelamente, com a interface entre eles podendo ser lisa ou ondulada. Embora seja o padrão mais simples, as características de escoamento ainda não são calculadas apropriadamente para fluidos complexos ou escoamentos em alta pressão.

O escoamento estratificado ainda pode ser dividido em quatro subregimes (Andritsos e Hanratty, 1987b; Tzotzi et al., 2011; Chen et al. 1997; Fernandino e Ytrehus, 2006), sendo eles:

- (1) Escoamento suave com interface lisa;
- (2) Interface com presença de ondas pequenas e regulares, cuja amplitude e comprimento de onda aumentam com a distância da tubulação;
- (3) Interface com presença de ondas irregulares de grandes amplitudes com alta interferência;
- (4) Quando há dispersão de gotas e filamentos líquidos desprendidos das ondas de grande amplitude e o líquido começa a subir pelas paredes, o que leva a interface a apresentar uma aparência côncava.

A transição entre esses quatro subregimes está ligada à tensão interfacial entre os fluidos (Andreussi et al. 1985).

4.2. Escoamentos Turbulentos

Segundo Taylor e Von Karman (1938), a turbulência pode ser descrita como um movimento irregular que, em geral, aparece em fluidos, gasosos ou líquidos, quando escoam sobre superfícies sólidas ou quando camadas de fluido com diferentes velocidades escoam uma sobre as outras.

A turbulência é um fenômeno contínuo intrinsecamente tridimensional, rotacional e dependente do tempo, podendo ser gerada por instabilidades no escoamento laminar, quando o número de Reynolds se torna grande. Ela ocorre ao longo de um amplo intervalo de escalas de comprimento e tempo, maiores que as escalas moleculares.

A existência de várias escalas de vórtices, sugere que há transferência de energia entre essas escalas, comumente chamada de cascata de energia. Esta descreve que a energia é transferida das maiores escalas para as menores até a menor escala possível, na qual será dissipada na forma de calor devido à viscosidade molecular. Assim, escoamentos turbulentos são sempre dissipativos.

Escoamentos turbulentos também exibem caráter altamente difusivo, o que promove um aumento nas transferências de massa, momento e energia.

Outro efeito da viscosidade é tornar a turbulência mais homogênea, ou seja, menos dependente da posição. No caso de turbulência homogênea, esta apresentará invariância estatística das propriedades do escoamento em todas as partes do escoamento, ou seja, quando se promove uma translação do sistema de coordenadas.

A turbulência é chamada de isotrópica se as características estatísticas não apresentarem nenhuma preferência para alguma direção particular. Compreende-se, então, que isotropia implica em homogeneidade, mas a recíproca não é verdadeira. Nessa situação, o gradiente de velocidade média é zero. Caso este gradiente seja diferente de zero, o escoamento é anisotrópico.

As equações que regem o escoamento laminar são as mesmas que regem o caso turbulento. Contudo, a resolução das equações do movimento para escoamentos tridimensionais é complicada devido à não linearidade das equações.

Atualmente, existem basicamente três métodos para analisar um escoamento turbulento: DNS (Direct Numerical Simulation), no qual são realizados os cálculos para todas as escalas da turbulência, LES (Large Eddy Simulation), no qual os cálculos só são realizados para as maiores escalas e as menores são modeladas, e RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes), que utilizam modelos estatísticos baseados nas equações médias no tempo.

Como o fenômeno é irregular e aleatório, apresentando quantidades com flutuações randômicas em torno de um valor médio, uma boa maneira de abordar o problema é através de métodos estatísticos. A aplicação de médias temporais, no entanto, gera termos desconhecidos nas equações. Este é o problema de fechamento da turbulência, uma vez que esses termos desconhecidos deverão ser modelados. Portanto, um modelo de turbulência é definido como um conjunto de equações que determinam os termos de transporte turbulento nas equações médias e, assim, fecham o sistema de equações.

4.3. A Camada Limite Turbulenta e a Lei de Parede

A camada limite viscosa que se forma em escoamentos próximos à superfícies, podem se tornar turbulentas à medida que o número de Reynolds do escoamento aumenta. A camada limite turbulenta é caracterizada por uma estrutura assintótica, na qual a velocidade varia de zero à velocidade do escoamento externo, e pode ser subdividida em três regiões principais: subcamada viscosa, região logarítmica e região externa.

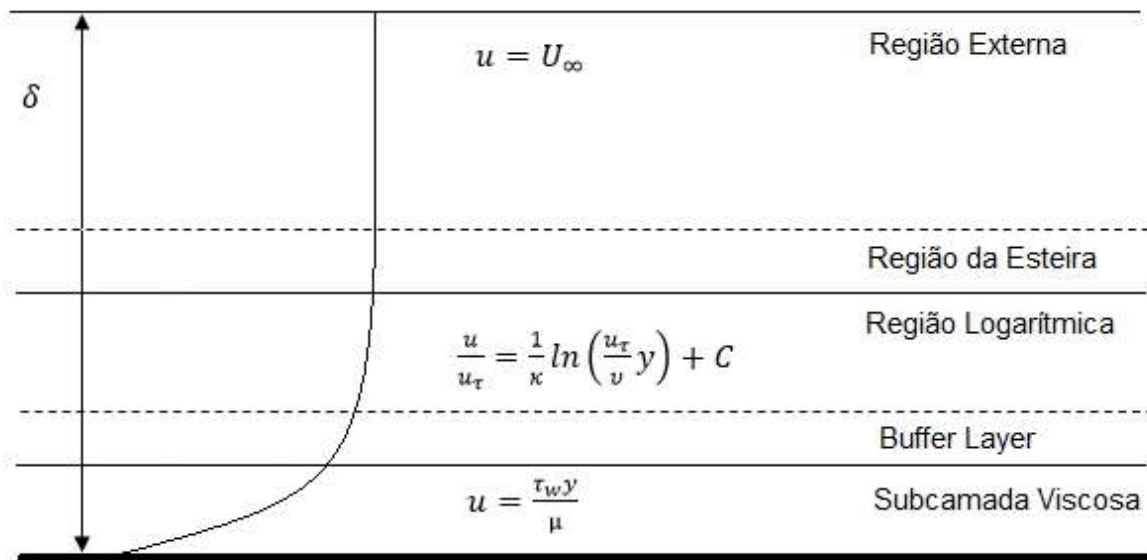


Figura 4.3: A estrutura assintótica da camada limite turbulenta.

A subcamada viscosa é uma região bastante fina mais próxima à parede, na qual os efeitos viscosos prevalecem. Em seguida, a região logarítmica é a camada logo acima, onde prevalecem os efeitos turbulentos. Finalmente, a região mais externa é onde prevalecem os efeitos inerciais e o escoamento tende a velocidade do escoamento externo.

É importante notar que, entre cada região, naturalmente existem camadas de transição: a *buffer layer* e a região da esteira. Na *buffer layer*, os efeitos turbulentos da região logarítmica são amortecidos conforme chega-se próximo à parede pelos efeitos viscosos. Já a região da esteira existe uma vez que a lei logarítmica descrita a seguir não é capaz de convergir à velocidade do escoamento externo, fazendo necessário um ajuste.

Se avaliarmos individualmente cada região, fazendo as simplificações aplicáveis às equações de quantidade de movimento da camada limite turbulenta, somos capazes de

encontrar perfis de velocidades singulares para as regiões da subcamada viscosa e logarítmica (White, 1991).

A subcamada viscosa apresenta um perfil linear de velocidades, enquanto a região turbulenta apresenta um perfil logarítmico, recebendo por isso a denominação de região logarítmica. Esta lei é extensivamente deduzida na literatura e pode ser encontrada em livros e artigos (Batchelor, 1967 e White, 1991), sendo descrita pela equação abaixo.

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{u_\tau}{\nu} y \right) + C \quad (4.1)$$

Capítulo 5

5. Desenvolvimento do Trabalho

O desenvolvimento da nova equação para o fator de atrito interfacial se deu em duas etapas. Devido ao alto grau de complexidade da descrição física do problema, fez-se primeiramente uma limitação geométrica considerando o escoamento em canais. Escolha baseada na necessidade de uma estipulação teórica física ainda sem considerar geometrias complexas. Em seguida, o mesmo tipo de escoamento foi avaliado em tubulações.

Em ambos os casos, considerou-se escoamento turbulento totalmente desenvolvido permanente, no qual as pressões são constantes na área transversal. As interfaces entre os fluidos são consideradas lisas e as superfícies não tem rugosidade.

5.1. Escoamento Bifásico Turbulento Estratificado em Canais

Foram considerados dois fluidos em escoamento paralelo como representado na figura abaixo.

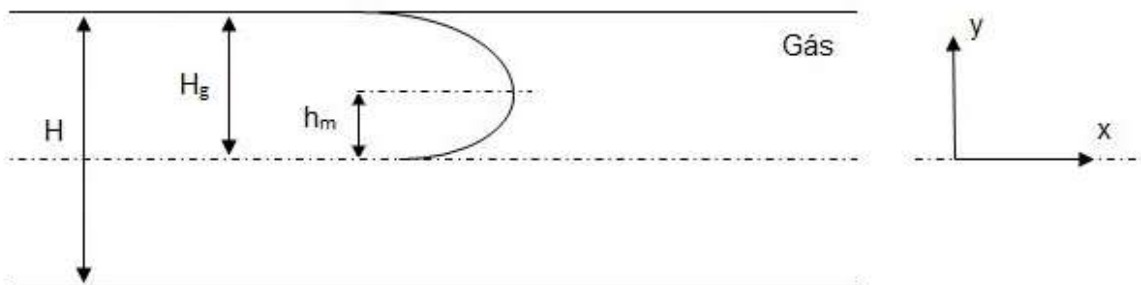


Figura 5.1: Escoamento bifásico entre placas, com perfil de velocidades na fase gasosa.

Na qual, H_g é a altura ocupada pelo gás e h_m , a altura do ponto de velocidade máxima.

A partir da estrutura acima, pode-se deduzir equações de balanço de força para o gás em escoamento totalmente desenvolvido, considerando as porções de fluido abaixo e acima do ponto de velocidade máxima, como representado na Figura 2.

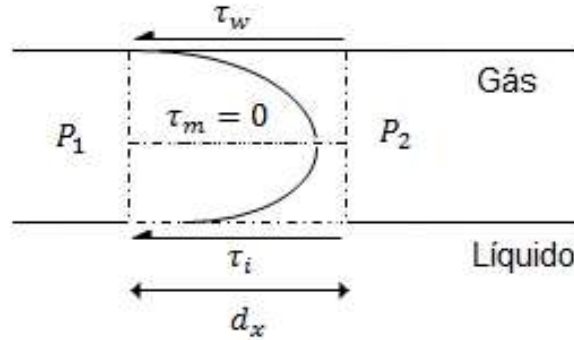


Figura 5.2: Porções de fluido utilizadas no balanço de forças.

Na qual, P_1 e P_2 são as pressões à jusante e a montante do escoamento, τ_w é a tensão na superfície, τ_i é a tensão na interface, dx é o comprimento infinitesimal e τ_m é a tensão cisalhante no ponto de máximo do perfil de velocidade, que tem valor nulo.

Aqui, considera-se que as pressões são constantes nas sessões transversais e que a superfície interfacial é lisa.

$$(P_2 - P_1)(H_g - h_m) = -\tau_w dx \quad (5.1)$$

$$(P_2 - P_1)h_m = -\tau_i dx \quad (5.2)$$

Rearranjando as equações, chega-se à conclusão que:

$$\tau_w = -\frac{dP}{dx}(H_g - h_m) \quad (5.3)$$

$$\tau_i = -\frac{dP}{dx}h_m \quad (5.4)$$

É interessante notar que, em ambas porções, a variação de pressão compensa as tensões com as respectivas superfícies, uma vez que a na camada de velocidade máxima, a tensão é nula.

Para representar o perfil de velocidades no gás, vamos considerar que ele possa ser subdividido em duas funções logarítmicas que se encontram no ponto onde a velocidade é máxima. Essas funções logarítmicas terão a forma da lei de parede. A lei de

parede descreve o perfil de velocidades em regime turbulento para escoamentos próximos à superfícies, no qual a velocidade varia de forma logarítmica com a distância da parede. A lei da parede apresenta a forma:

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{u_\tau}{\nu} y \right) + C \quad (5.5)$$

Na qual, u_τ é a velocidade característica, κ é a constante de Von Kármán, igual à 0.41, e C é uma constante calibrada, cujo valor mais utilizado na literatura é 5.

Em escoamentos turbulentos, é comum utilizar a velocidade característica como ordem de escala para velocidades. Ela pode ser definida como:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \quad (5.6)$$

Assim, para cada parte do perfil, define-se as velocidades características para o perfil superior ($u_{\tau s}$) e para o perfil inferior ($u_{\tau i}$):

$$u_{\tau s} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (5.7)$$

$$u_{\tau i} = \sqrt{\frac{\tau_i}{\rho}} \quad (5.8)$$

Em seguida, substituímos as equações (5.7) e (5.8) na razão das equações (5.3) e (5.4):

$$\frac{\tau_w}{\tau_i} = \frac{(H_g - h_m)}{h_m} = \frac{u_{\tau s}^2}{u_{\tau i}^2} \quad (5.9)$$

Rearranjando essa equação, podemos encontrar uma relação entre as alturas consideradas e as tensões na superfície e na interface:

$$\frac{h_m}{H_g} = \frac{\tau_i}{\tau_w + \tau_i} \quad (5.10)$$

Agora, vamos considerar o ponto de máximo do perfil de velocidades. Neste ponto, não há tensão cisalhante e funções logarítmicas devem assumir o mesmo valor de velocidade.

Sendo assim, a partir da equação (5.5), substituímos os devidos valores de velocidade característica de cada perfil e o valor de y local, lembrando que para cada função y representa a distância da respectiva superfície:

$$\frac{u_{\tau s}}{\kappa} \ln \left(\frac{u_{\tau s}}{v} (H_g - h_m) \right) + u_{\tau s} C = \frac{u_{\tau i}}{\kappa} \ln \left(\frac{u_{\tau i}}{v} h_m \right) + u_{\tau i} C \quad (5.11)$$

$$\xi = \frac{h_m}{H_g} = \frac{\tau_i}{\tau_w + \tau_i} \quad (5.12)$$

Para efeitos de simplicidade, introduz-se a variável ξ , definida pela equação (5.12). Introduzindo essa nova variável à equação (5.11), obtém-se:

$$\frac{u_{\tau s}}{\kappa} \ln \left(\frac{u_{\tau s}}{v} H_g (1 - \xi) \right) + u_{\tau s} C = \frac{u_{\tau i}}{\kappa} \ln \left(\frac{u_{\tau i}}{v} H_g \xi \right) + u_{\tau i} C \quad (5.13)$$

O fator de atrito representa a tensão na parede adimensional. Sua definição relaciona tensão, massa específica e velocidade como demonstrado nas equações (5.14) e (5.15).

$$f_s = \frac{2\tau_w}{\rho(u_G)^2} \quad (5.14)$$

$$f_i = \frac{2\tau_i}{\rho(u_G - u_L)^2} \quad (5.15)$$

Nas equações acima, f_s e f_i representam o fator de atrito do gás com a superfície e fator de atrito na interface, respectivamente. Cada fator de atrito está ligado à tensão (τ_w e τ_i) e com a velocidade local, sendo esta a velocidade do gás (u_G) para o fator de atrito superior e a velocidade relativa na interface, na qual u_L representa a velocidade da fase líquida.

Com essas definições, adaptamos a variável ξ e isolamos as velocidades características de acordo com a equação (5.8):

$$\xi = \frac{\tau_i}{\tau_w + \tau_i} = \left[\left(\frac{f_s(u_G)^2}{2} \cdot \frac{2}{f_i(u_G - u_L)^2} \right)^2 + 1 \right]^{-1} = \left[\left(\frac{f_s(u_G)^2}{f_i(u_G - u_L)^2} \right)^2 + 1 \right]^{-1} \quad (5.16)$$

$$u_{\tau i} = \left(\frac{f_i(u_G - u_L)^2}{2} \right)^{1/2} \quad (5.17)$$

$$u_{\tau s} = \left(\frac{f_s(u_G)^2}{2} \right)^{1/2} \quad (5.18)$$

Finalmente, substitui-se a equação (5.16) na igualdade definida por (5.11).

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{f_i}{2}} (u_G - u_L) \ln \left[\frac{H_g \xi}{v} \left(\frac{f_i(u_G - u_L)^2}{2} \right)^{1/2} \right] + \sqrt{\frac{f_i}{2}} (u_G - u_L) C = \\ \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{f_s}{2}} (u_G) \ln \left[\frac{H_g (1 - \xi)}{v} \left(\frac{f_s(u_G)^2}{2} \right)^{1/2} \right] + \sqrt{\frac{f_s}{2}} (u_G) C \end{aligned} \quad (5.19)$$

Assim, a equação implícita final para o cálculo do fator de atrito interfacial é:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \sqrt{f_i} (u_G - u_L) \ln \left[\frac{(u_G - u_L) H_g}{v} \xi \left(\frac{f_i}{2} \right)^{1/2} \right] + \sqrt{f_i} (u_G - u_L) C = \\ \frac{1}{\kappa} \sqrt{f_s} (u_G) \ln \left[\frac{u_G H_g}{v} (1 - \xi) \left(\frac{f_s}{2} \right)^{1/2} \right] + \sqrt{f_s} (u_G) C \end{aligned} \quad (5.20)$$

Na qual, κ é a constante de Von Kármán, igual à 0.41; C é uma constante calibrada, igual à 5; f_s e f_i representam o fator de atrito do gás com a superfície e fator de atrito na interface; ξ é uma variável definida por (5.16); H_g é a altura de gás no canal; u_G e u_L são as velocidades de gás e líquido e v é a viscosidade cinemática do gás. Vale ressaltar que os valores do fator de atrito com a superfície f_s serão calculados a partir de correlações existentes.

5.2. Escoamento Bifásico Turbulento Estratificado em Tubulações

Considerando agora o escoamento bifásico paralelo em tubulações, vamos realizar uma análise similar à apresentada na seção anterior.

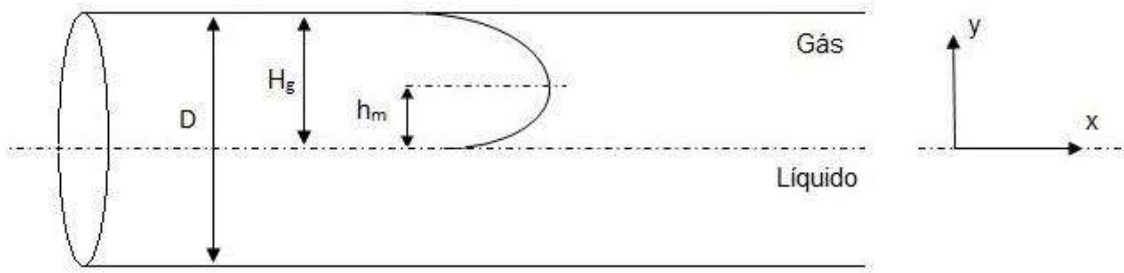


Figura 5.3: Escoamento bifásico em tubulação, com perfil de velocidades na fase gasosa.

Na figura acima, H é a altura ocupada pelo gás e h_m , a altura do ponto de velocidade máxima.

Com o objetivo de considerar a geometria da tubulação, realizou-se um balanço de massa na fase gasosa que pode ser representado pela equação a seguir.

$$Q_G = \int u \cdot dA \quad (5.21)$$

Novamente para representar o perfil de velocidades no gás, vamos considerar que ele possa ser subdividido em duas funções logarítmicas que se encontram no ponto onde a velocidade é máxima. Essas funções logarítmicas terão a forma da lei de parede. Lembrando que a lei de parede descreve o perfil de velocidades em regime turbulento para escoamentos próximos à superfícies, sem distinção de tipo de fluido. A integral de área da seção circular da tubulação será calculada como descrito na figura a seguir.

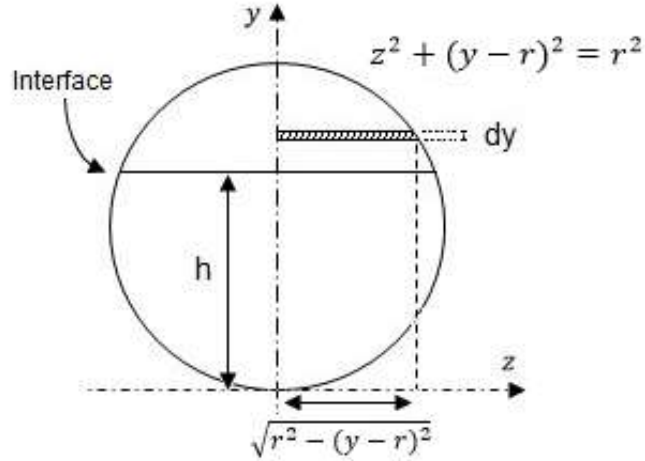


Figura 5.4: Descrição geométrica da seção circular da tubulação.

A partir desta descrição, chega-se à integral de área abaixo para o cálculo da área da seção transversal ocupada pelo gás.

$$A = \int_h^D 2 \sqrt{r^2 - (y - r)^2} dy \quad (5.22)$$

Retornando à porção de gás anteriormente descrita na Figura 5.2, podemos separar a equação (5.21) em conjunto com a equação (5.22) no seguinte:

$$Q_G = \int_h^{(h+h_m)} 2u_l \sqrt{r^2 - (y - r)^2} dy + \int_0^{D-(h+h_m)} 2u_s \sqrt{r^2 - (r - y)^2} dy \quad (5.23)$$

Na qual, u_l é o perfil de velocidades logarítmico inferior, partindo da interface, e u_s é o perfil de velocidades logarítmico superior, partindo do contato gás-superfície. É importante notar que a lei de parede utiliza a distância entre o ponto calculado e a superfície, sendo assim, no perfil superior é necessário manipular as coordenadas para que o referencial passe a ser a parede do duto.

Para tornar o equacionamento mais genérico, vamos utilizar notação adimensional. Os adimensionais que serão utilizados daqui em diante serão descritos a seguir.

$$u_a = u/u_{SG} \quad (5.24)$$

$$y_a = y/r \quad (5.25)$$

$$h_a = h/r \quad (5.26)$$

$$d_a = \frac{(h+h_m)}{r} \quad (5.27)$$

Aplicando essas definições às equações (4.1) e (5.23), encontramos a lei de parede adimensional e a equação de conservação de massa adimensional respectivamente. Essas transformações estão apresentadas nos Apêndices A e B.

$$u_a = \frac{u_\tau}{Ku_{SG}} \ln \left(\frac{Re u_\tau}{u_{SG}} y_a \right) + \frac{u_\tau}{u_{SG}} C \quad (5.28)$$

$$\frac{Q_G}{r^2 u_{SG}} = \int_{h_a}^{d_a} 2 u_{Ia} \sqrt{1 - (y_a - 1)^2} dy_a + \int_0^{2-d_a} 2 u_{Sa} \sqrt{1 - (1 - y_a)^2} dy_a \quad (5.29)$$

O próximo passo é substituir a equação (5.28) na equação (5.29) e resolver as integrais. Esse desenvolvimento está descrito no Apêndice C e a equação final encontrada é apresentada abaixo.

$$\begin{aligned} \frac{Q_G}{r^2 u_{SG}} = & u_{\tau s} \left\{ \frac{1}{9Ku_{SG}} \left[9 \ln \left(\frac{Re u_{\tau s}}{u_{SG}} (2 - d_a) \right) \left((1 - d_a) \sqrt{2d_a - d_a^2} + 2 \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{(2-d_a)}}{\sqrt{2}} \right) \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. 8\sqrt{2(2-d_a)^2} \right] + \frac{C}{u_{SG}} \left(\frac{\pi}{2} - D3 \right) \right\} + u_{\tau i} \left\{ \frac{1}{9Ku_{SG}} \left[9 \ln \left[\left(\frac{Re u_{\tau i}}{u_{SG}} \right)^{D1-D2} \frac{d_a^{D1}}{h_a^{D2}} \right] + 8\sqrt{2} \left(h_a^{3/2} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. d_a^{3/2} \right) \right] + \frac{C}{u_{SG}} (D3 - D4) \right\} \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$D1 = (d_a - 1) \sqrt{2d_a - d_a^2} + 2 \sin^{-1} \left(\sqrt{d_a/2} \right) \quad (5.31)$$

$$D2 = (h_a - 1) \sqrt{2h_a - h_a^2} + 2 \sin^{-1} \left(\sqrt{h_a/2} \right) \quad (5.32)$$

$$D3 = (d_a - 1) \sqrt{2d_a - d_a^2} + \sin^{-1}(d_a - 1) \quad (5.33)$$

$$D4 = (h_a - 1) \sqrt{2h_a - h_a^2} + 2 \sin^{-1}(h_a - 1) \quad (5.34)$$

Na qual, κ é a constante de Von Kármán, igual à 0.41; C é uma constante calibrada, igual à 5; $u_{\tau s}$ e $u_{\tau i}$ representam as velocidades características utilizadas no cálculo do fator de atrito do gás com a superfície e fator de atrito na interface; u_{SG} é a velocidade superficial do gás; h_a é a altura de líquido adimensional na tubulação; d_a é a altura até o ponto de velocidade máxima do gás; Q_G é a vazão mássica de gás; r é o raio da tubulação e Re é o número de Reynolds baseado na velocidade superficial do gás e no raio.

Analisando a equação (5.30), é possível notar que necessitamos utilizar uma correlação para calcular o fator de atrito entre gás e superfície e gerar uma outra equação acoplada para calcular a altura do ponto de velocidade máxima do gás. Este será assunto da seção a seguir.

5.3. Ponto de Velocidade Máxima

No modelo aqui apresentado, uma definição mais precisa do ponto de velocidade máxima na fase gasosa é essencial. Representamos até agora o perfil de velocidades do gás como resultado de duas leis logarítmicas que se encontram no ponto de velocidade máxima. Sendo assim, utilizou-se a lei de parede adimensional (equação 5.28) para, a partir de uma igualdade, calcular a altura do ponto de interesse, no qual as curvas se cruzam. A igualdade em questão é:

$$\frac{u_{\tau i}}{Ku_{SG}} \ln \left(\frac{Re u_{\tau i}}{u_{SG}} y_{ai} \right) + \frac{u_{\tau i}}{u_{SG}} C = \frac{u_{\tau s}}{Ku_{SG}} \ln \left(\frac{Re u_{\tau s}}{u_{SG}} y_{as} \right) + \frac{u_{\tau s}}{u_{SG}} C \quad (5.35)$$

Como cada lei de parede parte de uma superfície diferente, sendo elas a interface e a parede do duto, substitui-se os valores de y específicos:

$$\frac{u_{\tau i}}{Ku_{SG}} \ln \left(\frac{Re u_{\tau i}}{u_{SG}} \cdot \frac{h_m}{r} \right) + \frac{u_{\tau i}}{u_{SG}} C = \frac{u_{\tau s}}{Ku_{SG}} \ln \left(\frac{Re u_{\tau s}}{u_{SG}} \cdot \frac{(D - (h + h_m))}{r} \right) + \frac{u_{\tau s}}{u_{SG}} C \quad (5.36)$$

Rearranjando e simplificando a igualdade acima, encontra-se a seguinte equação implícita:

$$h_m = \frac{r u_{SG}}{Re u_{\tau i}} e^Z \quad (5.37)$$

$$Z = \frac{u_{\tau s}}{u_{\tau i}} \ln \left(\frac{Re u_{\tau s}}{u_{SG}} \cdot \frac{(D-(h+h_m))}{r} \right) + \frac{C}{u_{\tau i}} (u_{\tau s} - u_{\tau i}) \quad (5.38)$$

Na qual, κ é a constante de Von Kármán, igual à 0.41; C é uma constante calibrada, igual à 5; $u_{\tau s}$ e $u_{\tau i}$ representam as velocidades características utilizadas no cálculo do fator de atrito do gás com a superfície e fator de atrito na interface; u_{SG} é a velocidade superficial do gás; h_a é a altura de líquido adimensional na tubulação; d_a é a altura até o ponto de velocidade máxima do gás; Q_G é a vazão mássica de gás; r é o raio da tubulação e Re é o número de Reynolds baseado na velocidade superficial do gás e no raio.

5.4. Resumo

Para o caso de canais, a partir das variáveis do escoamento e do fluido, a equação (5.20) é utilizada para o cálculo do fator de atrito interfacial. Já para o caso de tubulações, com as equações (5.30) e (5.37), obtemos um sistema de duas equações e duas incógnitas a serem resolvidas simultaneamente com o objetivo de encontrar a velocidade característica na interface gás-líquido e, finalmente, calcular o fator de atrito interfacial em tubulações através da definição de fator de atrito abaixo.

$$f_i = \frac{2 u_{\tau i}^2}{(u_G - u_L)^2} \quad (5.39)$$

Na figura seguinte, ambos os modelos estão descritos resumidamente.

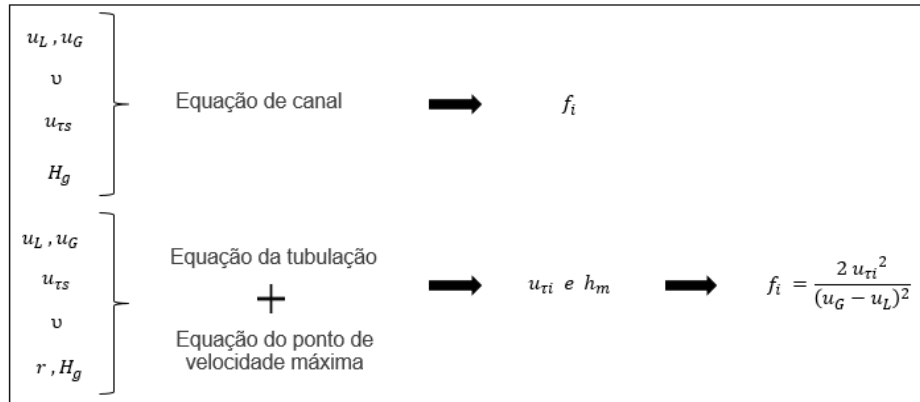


Figura 5.5: Resumo dos modelos propostos.

Capítulo 6

6. Análise dos Resultados

A introdução de novos modelos teóricos e empíricos na indústria requer embasamento teórico e numérico. Quando uma nova teoria ou formulação é gerada, é necessário ter certeza de que ela representa bem os fenômenos físicos que simbolizam. Para isso, utiliza-se ferramentas numéricas, experimentais ou estatísticas com o objetivo de prever, corrigir ou adaptar o comportamento do novo modelo.

O objetivo deste trabalho, é introduzir uma nova correlação para o fator de atrito interfacial entre gás e líquido baseado em considerações físicas que possa ser aplicada em uma gama maior de condições de escoamento.

Nesta seção serão avaliados resultados numéricos das equações encontradas para garantir que os modelos funcionam corretamente. Primeiramente, iremos realizar uma análise de como as equações se comportam em relação às suas variáveis, observando se este comportamento está dentro do resultado físico esperado. Em seguida, utilizaremos modelos existentes e dados experimentais para comparação e validação, realizando, por fim, uma análise geral dos resultados.

Vale lembrar que o escoamento aqui representado é horizontal e estratificado. Assim, o conjunto de dados das propriedades analisadas devem representar o padrão de escoamento e serem capazes de fornecer informações que corroborem se o objetivo do trabalho foi ou não alcançado.

6.1. Equação para canais

A equação para o cálculo do fator de atrito entre fases em escoamentos em canais encontrada é uma equação implícita dependente das propriedades do fluido e do atrito entre gás e superfície. Para resolver essa equação numericamente, um programa no software Matlab foi elaborado. Neste programa, a equação é resolvida através de um método iterativo. Os resultados obtidos serão expostos e discutidos a seguir.

6.1.1. Comportamento do modelo

Para analisar o comportamento do modelo dentro de diferentes valores das variáveis mais importantes, utilizou-se os dados de Taitel e Duckler (1976), no qual os autores desenvolvem o mapa de padrões de escoamentos a seguir.

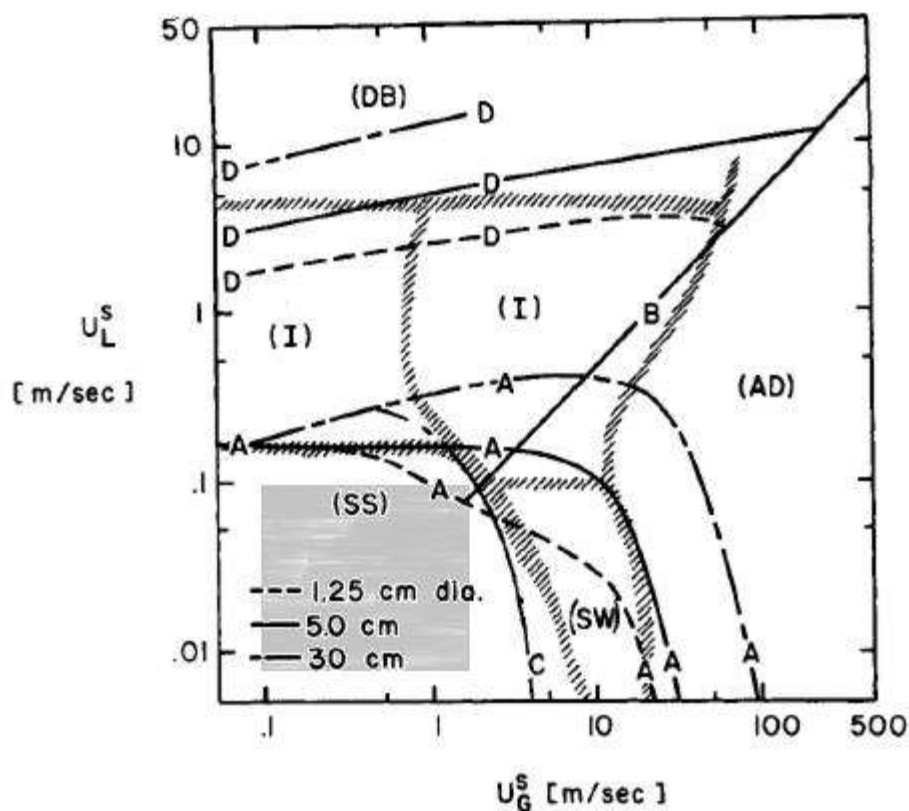


Figura 6.1: Mapa de padrão de escoamento para diferentes diâmetros. Comparação modelo de Taitel e Duckler, 1976 (linhas sólidas) e Mandhane et al, 1974 (linhas tracejadas). Escoamento água-ar, 1 atm, 25°C, tubulação horizontal. (Fonte: Taitel e Duckler, 1976)

A partir dos dados para escoamento estratificado sombreados no mapa acima, foram realizados cálculos para diferentes valores de velocidade do gás, mantendo a velocidade de líquido e a fração de gás constantes. Os resultados estão descritos nos gráficos a seguir.

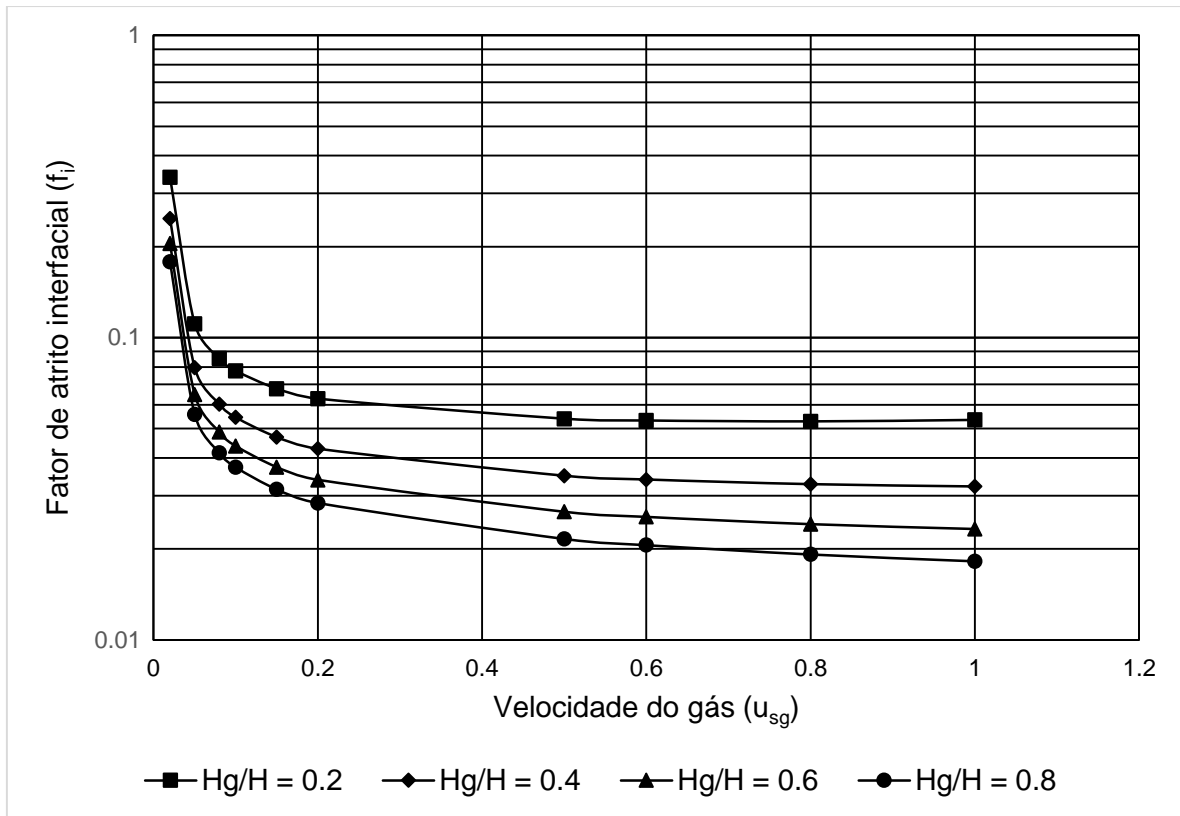


Figura 6.2: Gráfico da variação do fator de atrito com a velocidade de gás, mantendo a velocidade de líquido (0.01 m/s) e frações constantes. Escoamento água-ar, 1 atm, 25°C, canal horizontal com 1.25 cm de altura.

Neste gráfico, a velocidade superficial do líquido foi considerada constante e sempre inferior às velocidades de gás consideradas, situação mais comum de ser encontrada. Pode-se notar que para frações volumétricas constantes, o aumento da velocidade do gás diminui o atrito entre fases. Outra informação que o gráfico fornece é que a fração de gás tem influência no cálculo do fator de atrito quando as mesmas velocidades são consideradas, quanto maior a quantidade de gás, menor é o atrito entre fases.

Em escoamentos turbulentos, o incremento das velocidades gera uma maior tensão interfacial devido a maior interação entre os fluidos. Esta, porém, não cresce com a mesma proporção do aumento da velocidade, o que causa uma diminuição no valor do fator de atrito. Já para uma variação no nível dos fluidos, conforme o nível de gás é aumentado, sua velocidade decresce enquanto a de líquido cresce, diminuindo a tensão interfacial entre elas e, conseqüentemente, o fator de atrito.

Fazendo agora a mesma análise para um valor fixo de vazão de gás e variando a vazão do líquido, obtém-se o gráfico a seguir.

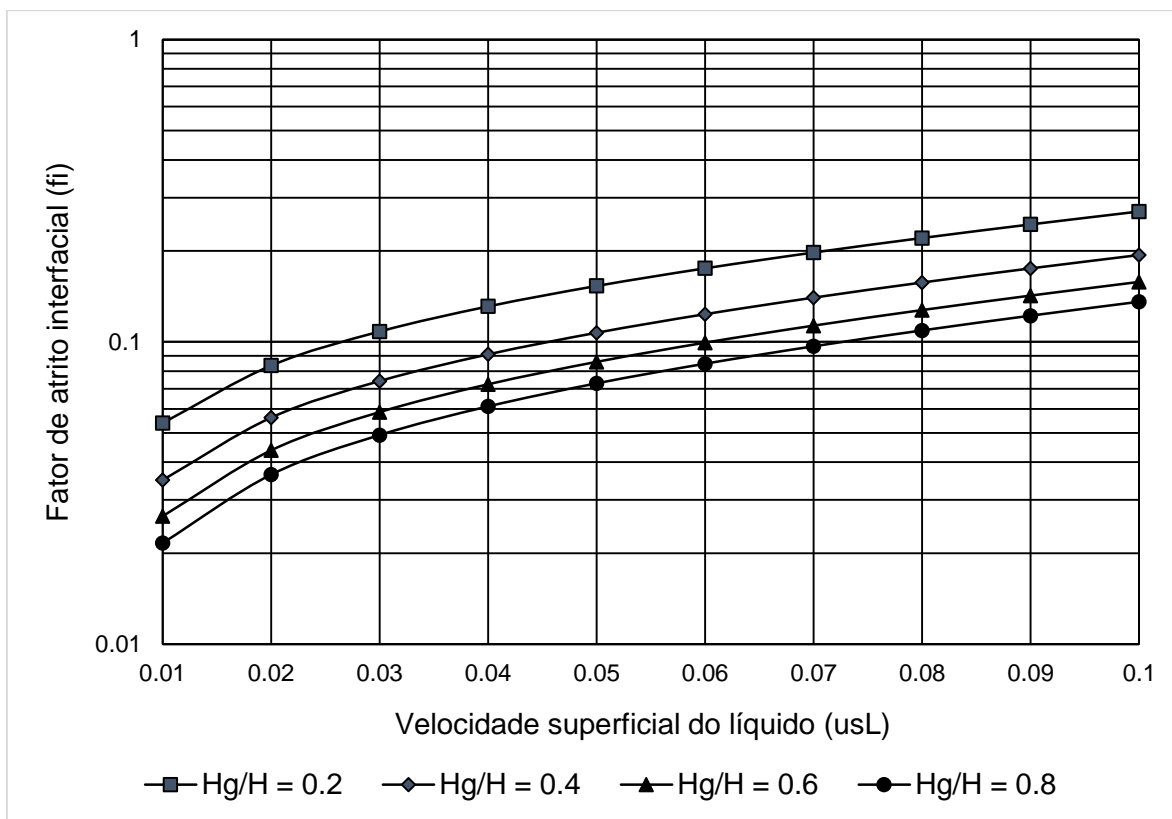
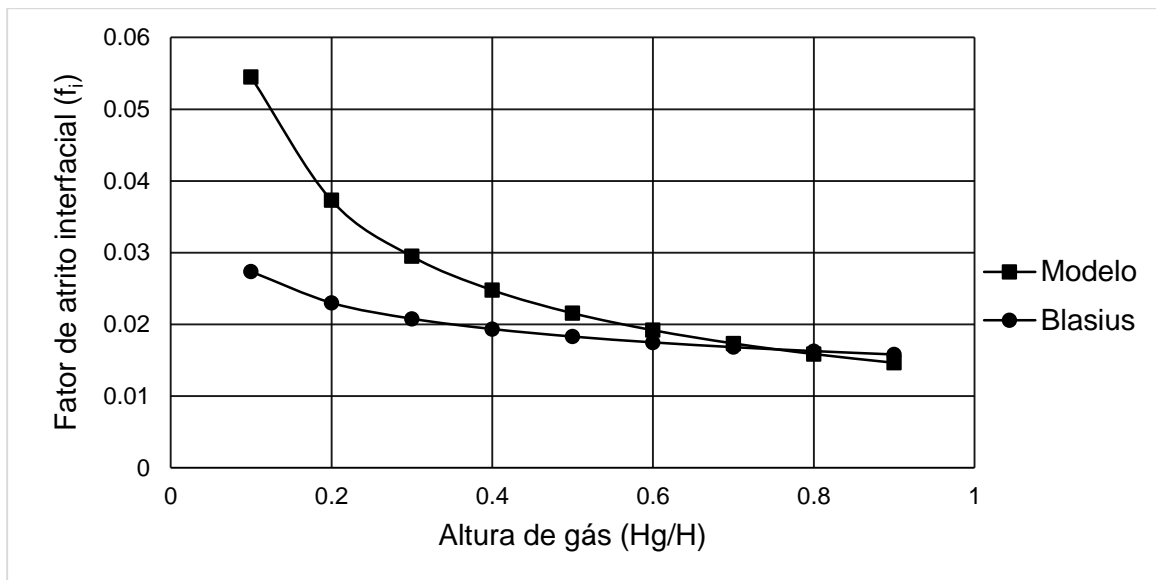


Figura 6.3: Gráfico da variação do fator de atrito com a velocidade de líquido, mantendo a velocidade de gás (0.5 m/s) e frações constantes. Escoamento água-ar, 1 atm, 25°C, canal horizontal com 1.25 cm de altura.

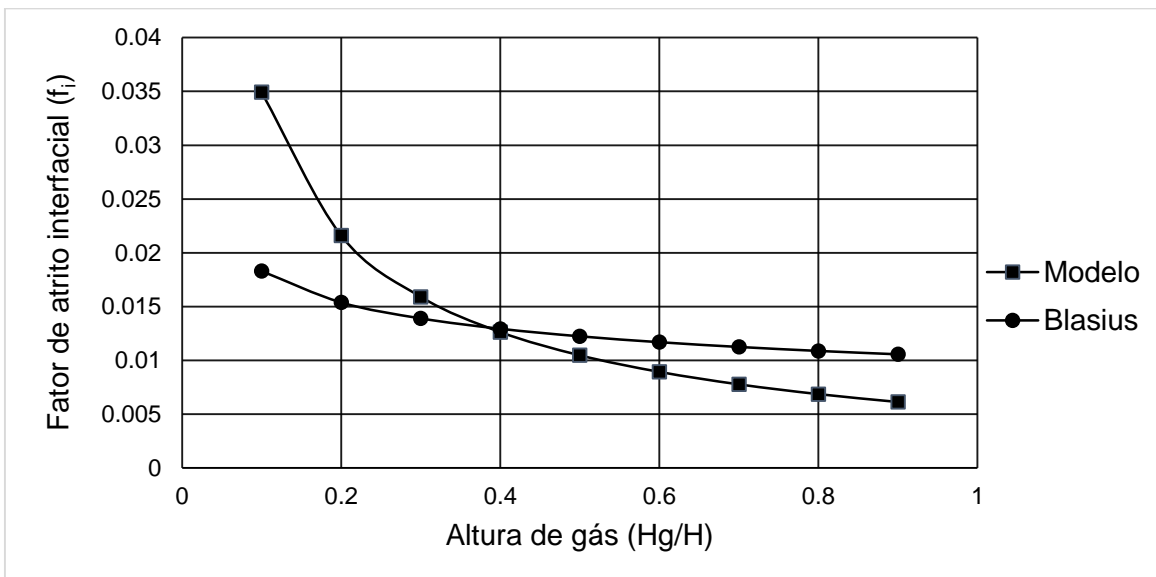
Neste gráfico, a velocidade superficial do gás foi considerada constante e sempre superior às velocidades superficiais de líquido consideradas. Pode-se notar que para frações volumétricas constantes, o aumento da velocidade do líquido aumenta o atrito entre fases. Pode-se observar também que a fração de gás também influencia no fator de atrito nesse caso. Similarmente ao gráfico anterior, os valores diminuem para frações maiores de gás.

6.1.2. Comparação com modelo de Blasius

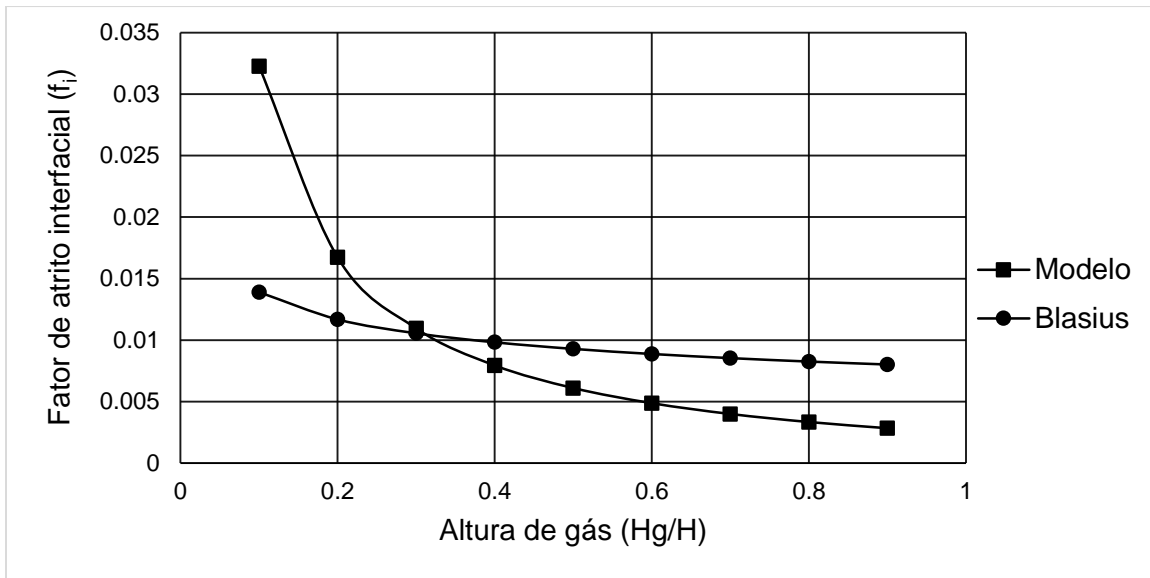
Equações e estudos de escoamentos em canais neste contexto não são usualmente encontrados na literatura. Nesse sentido, iremos realizar apenas uma análise de comparação com os valores da equação de Blasius, amplamente utilizada para o cálculo do fator de atrito entre fluido e superfície. Para tanto, construíram-se os gráficos a seguir para diferentes alturas de gás.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.4: Gráfico de comparação dos resultados do presente modelo com o modelo de Blasius. Escoamento água-ar, 1 atm, 25°C, canal horizontal com 1.25 cm de diâmetro, velocidade de líquido de 0.01 m/s e velocidades de gás de (a) 0.1 m/s (b) 0.5 m/s e (c) 1 m/s.

Em todos os gráficos, os valores do modelo começam maiores que os valores de Blasius em baixas frações de gás até um ponto em que as curvas se cruzam e o modelo passa a apresentar valores menores. Na Figura 6.4(a), que representa baixas velocidades, é possível observar que o modelo tende para a equação de Blasius para altas frações de gás. Esse comportamento é muito interessante porque, uma vez que a equação de Blasius calcula o atrito entre fluido e superfície, quando o nível de gás tende a ocupar toda a tubulação, o atrito resultante tende a ser aquele com a superfície da tubulação.

Considerando as análises feitas anteriormente, pode-se dizer que o modelo se comporta adequadamente dentro das variações dos parâmetros. O aumento da velocidade do gás mostrou uma queda nos valores do fator de atrito, enquanto para o aumento da velocidade do líquido, houve incremento no fator de atrito. A comparação entre os modelos mostrou que o modelo se aproxima dos valores de Blasius para baixas velocidades e altas frações de gás, apresentando comportamento mais sensível às variações de velocidade e fração de gás. O fato do modelo ser mais sensível às velocidades é uma grande vantagem, uma vez que para baixos valores de nível de gás há altos gradientes de velocidade, incrementando assim a tensão interfacial.

6.2. Sistema para tubulações

A resolução do sistema para o cálculo do fator de atrito em tubulações também foi realizada no software Matlab. A solução de um sistema é mais complexa e foi possível através do método dos mínimos quadrados, no qual o programa foi capaz de encontrar mínimos locais dentro das restrições geométricas do problema. Os resultados específicos são descritos nos tópicos a seguir.

6.2.1. Comportamento do modelo

Para analisar o comportamento do modelo dentro de diferentes valores das variáveis mais importantes, utilizou-se novamente os dados de Taitel e Duckler (1976) apresentados na Figura 6.1. Primeiramente, foram realizados cálculos para diferentes valores de velocidade superficial do gás, mantendo a velocidade superficial de líquido e a fração de gás constantes. Os resultados estão descritos nos gráficos a seguir.

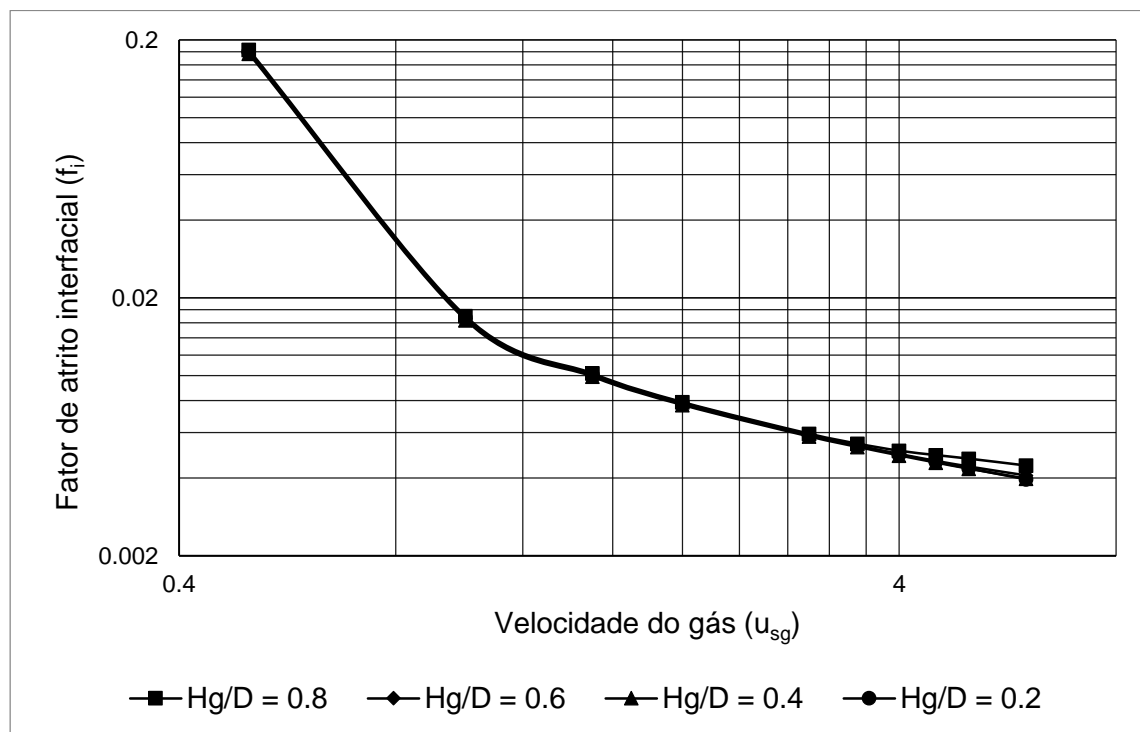


Figura 6.5: Gráfico da variação do fator de atrito com a velocidade de gás, mantendo a velocidade de líquido (0.4 m/s) e frações constantes. Escoamento água-ar, 1 atm, 25°C, tubulação horizontal com 30 cm de diâmetro.

Neste gráfico, a velocidade superficial do líquido foi considerada constante e sempre inferior às velocidades de gás consideradas. Pode-se notar que para frações volumétricas constantes, o aumento da velocidade do gás diminui o fator de atrito entre fases, comportamento esperado em escoamentos turbulentos como visto anteriormente. Outra informação que o gráfico fornece é a pequena influencia que a fração de gás tem no cálculo do fator de atrito quando as mesmas velocidades são consideradas, diferentemente do que ocorre para canais. Essa característica pode ser explicada pela geometria do problema. Com a presença das superfícies da tubulação, a interação fluido-superfície passa a ser um fator mais importante independente da fração de fluido considerada.

Fazendo agora a mesma análise para um valor fixo de vazão de gás e variando a vazão do líquido, obtém-se o gráfico a seguir.

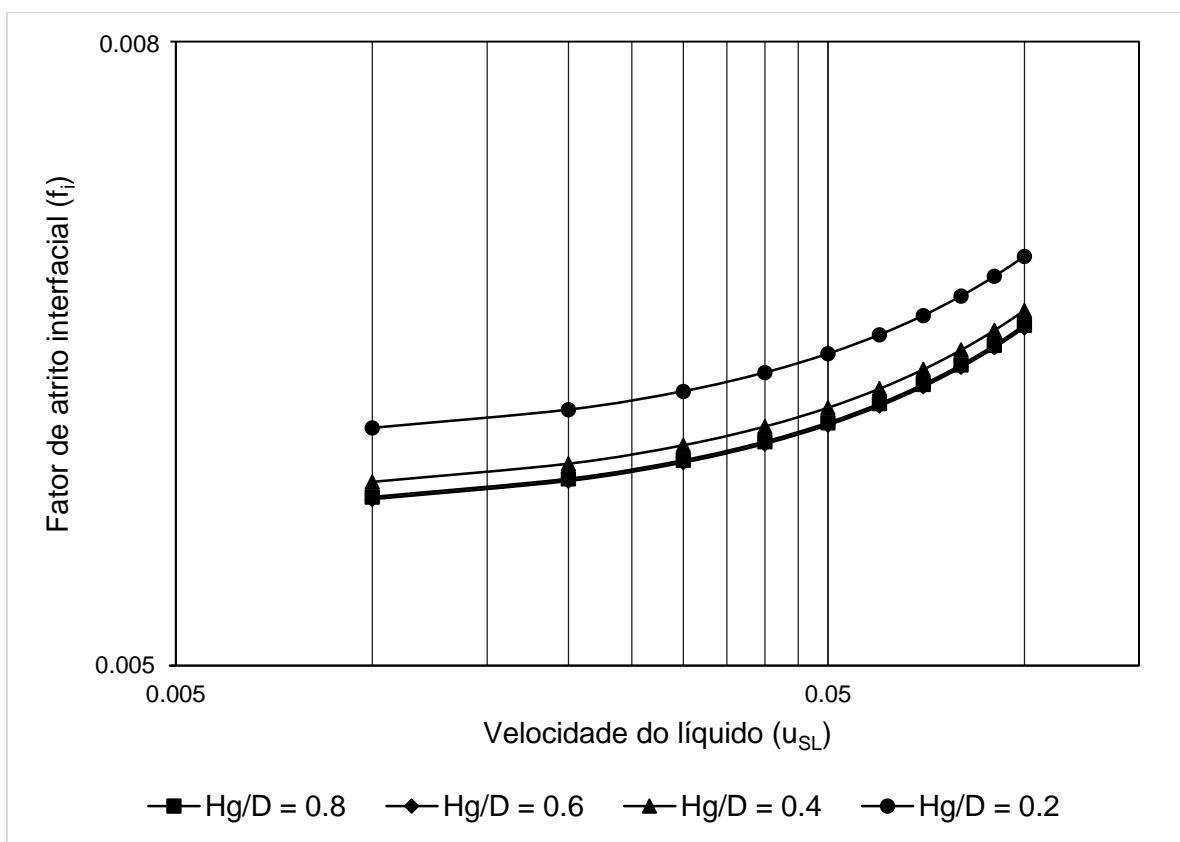


Figura 6.6: Gráfico da variação do fator de atrito com a velocidade de líquido, mantendo a velocidade de gás (1 m/s) e frações constantes. Escoamento água-ar, 1 atm, 25°C, tubulação horizontal com 30 cm de diâmetro.

Neste gráfico, a velocidade do gás foi considerada constante e sempre superior às velocidades de líquido consideradas. Pode-se notar que para frações volumétricas constantes, o aumento da velocidade do líquido aumenta o fator de atrito entre fases. Adicionalmente, o fator de atrito interfacial diminui levemente conforme a fração de gás aumenta, variando muito pouco a partir do nível de 60%.

Vamos realizar agora a mesma análise de variação das propriedades do escoamento para um sistema óleo-gás com as propriedades do mapa de padrões de escoamento abaixo. A região de dados utilizados está sombreada no mapa.

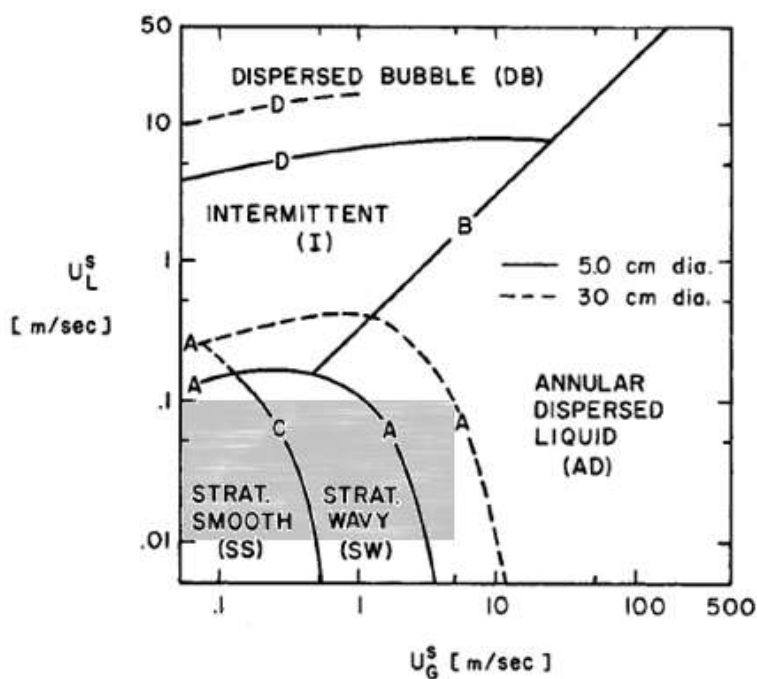


Figura 6.7: Mapa de padrão de escoamento. Escoamento óleo-gás, 68 atm, 38°C, tubulação horizontal com 5 e 30 cm de diâmetro. (Fonte: Taitel e Dukler, 1976)

As características do óleo e gás considerados por Taitel e Dukler (1976) na elaboração do mapa estão apresentadas na tabela a seguir.

Tabela 6.1 – Propriedades dos fluidos considerados.

	ρ (kg/m ³)	μ (Pa.s)	ν (m ² /s)
Óleo	650	5×10^{-4}	7.7×10^{-7}
Gás	50	1.5×10^{-5}	3×10^{-7}

Como realizado para o escoamento água-ar, primeiramente vamos considerar constantes a velocidade de líquido, igual para todos os casos, e a fração de gás, variando a velocidade de gás dentro do intervalo das velocidades para escoamento estratificado, mantendo em mente que estas devem fornecer escoamento turbulento. Depois, vamos fazer o mesmo para as velocidades de líquido, mantendo constante agora a velocidade do gás.

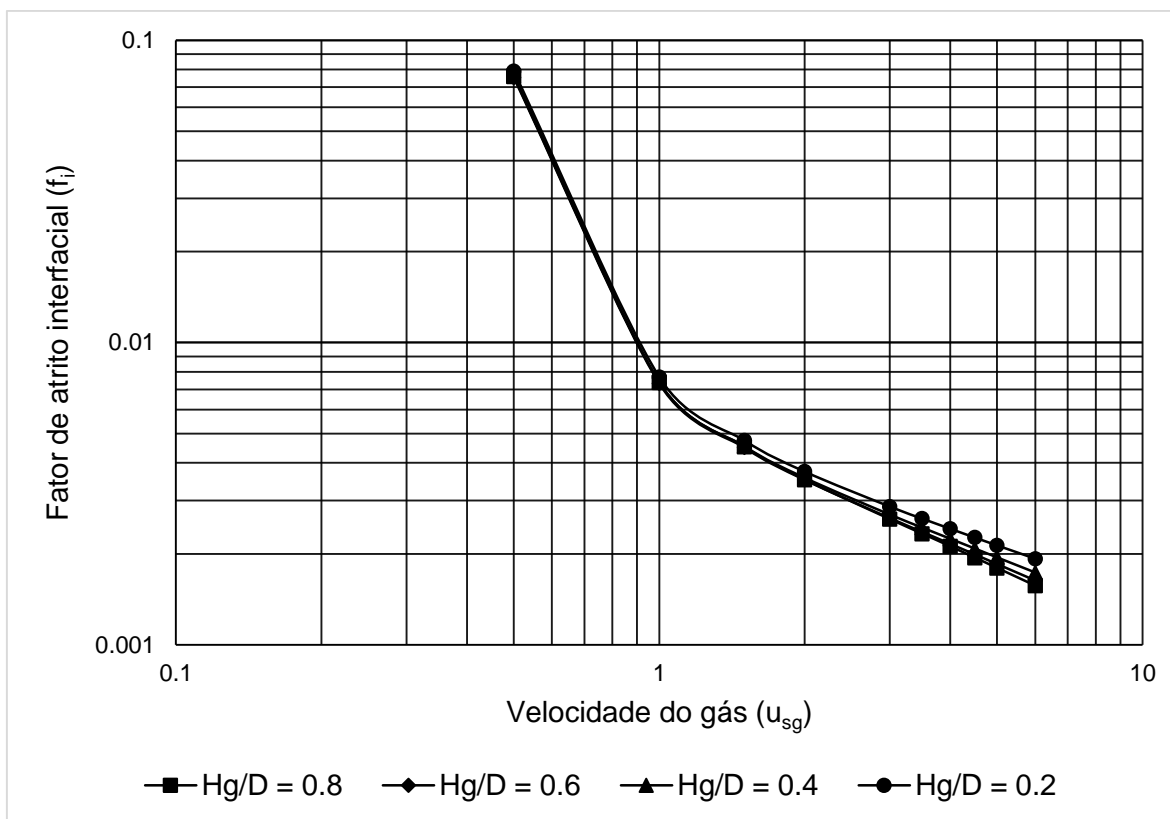


Figura 6.8: Gráfico da variação do fator de atrito com a velocidade de gás, mantendo a velocidade de líquido (0.4 m/s) e frações constantes. Escoamento óleo-gás, 68 atm, 38°C, tubulação horizontal com 30 cm de diâmetro.

O gráfico demonstra o mesmo comportamento observado anteriormente, mostrando, porém, uma variação um pouco maior no fator de atrito dentro do mesmo intervalo de velocidades. Para o escoamento óleo-gás, pode-se notar também que para velocidades maiores, a fração de gás tem uma maior influência nos resultados, porém a fração apresenta pouca influência de maneira geral. Novamente este pode ser um resultado da geometria do problema, na qual as superfícies apresentam maior influência.

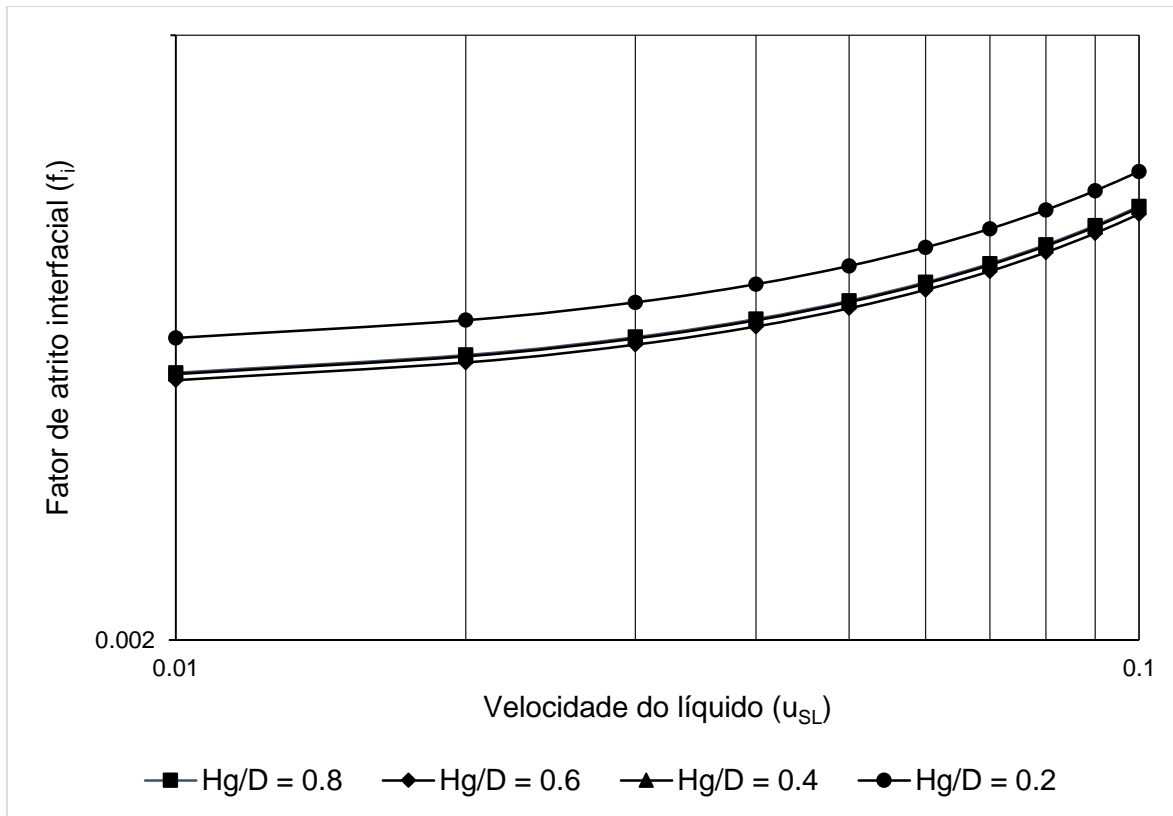


Figura 6.9: Gráfico da variação do fator de atrito com a velocidade de líquido, mantendo a velocidade de gás (1 m/s) e frações constantes. Escoamento óleo-gás, 68 atm, 38°C, tubulação horizontal com 30 cm de diâmetro.

Mais uma vez, no gráfico de variação da velocidade do líquido, também observamos o mesmo comportamento. A fração de gás apresenta pouca influência, mas é interessante notar que a tendência das curvas é diminuir conforme aumenta-se a fração de gás, até chegar no valor de 80%. A curva do 80% volta a subir, sugerindo que há uma inflexão no comportamento do fator de atrito. Como as velocidades consideradas são superficiais, conforme aumenta-se a fração de gás, a velocidade da fase gasosa tende a baixar, enquanto a velocidade da fase líquida a subir. Assim, esse comportamento pode ser resultante da definição utilizada para o fator de atrito que considera a diferença entre essas velocidades (Equação 5.39).

O próximo gráfico representa os resultados para os fatores de atrito de ambos os casos de escoamento considerados: água-ar e óleo-gás. Pode-se notar que o fator de atrito é extremamente dependente do tipo de fluido considerado.

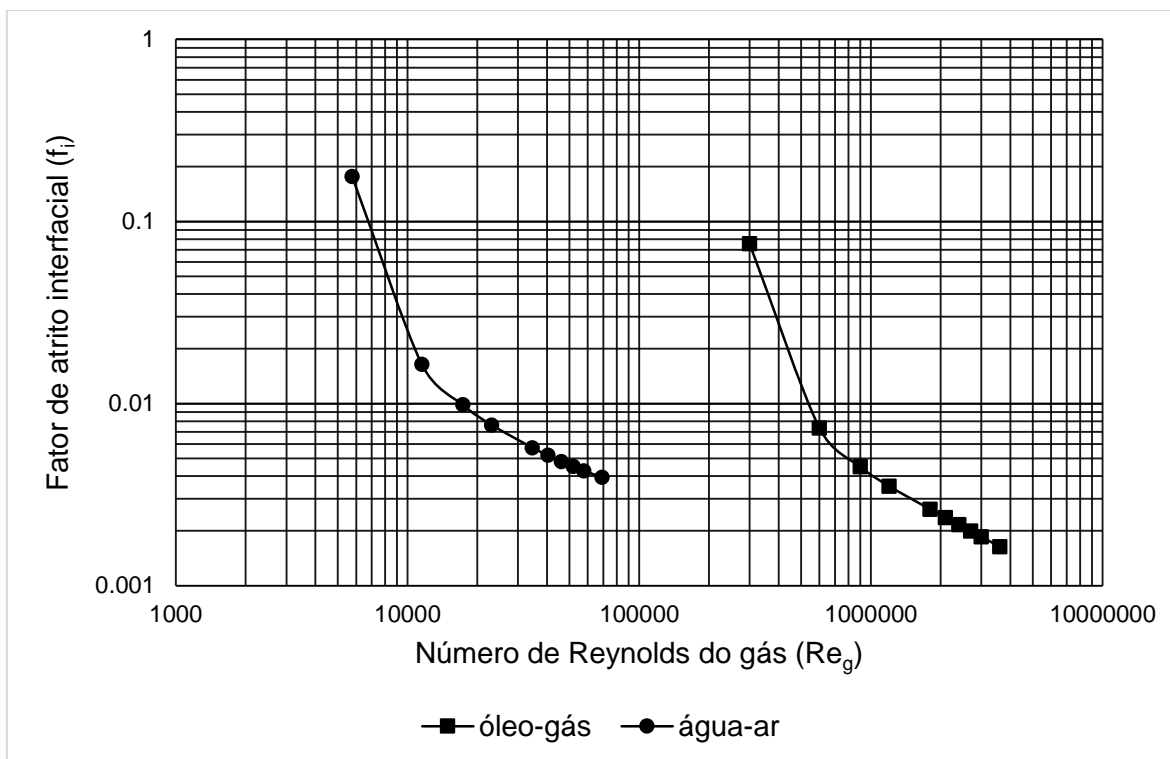


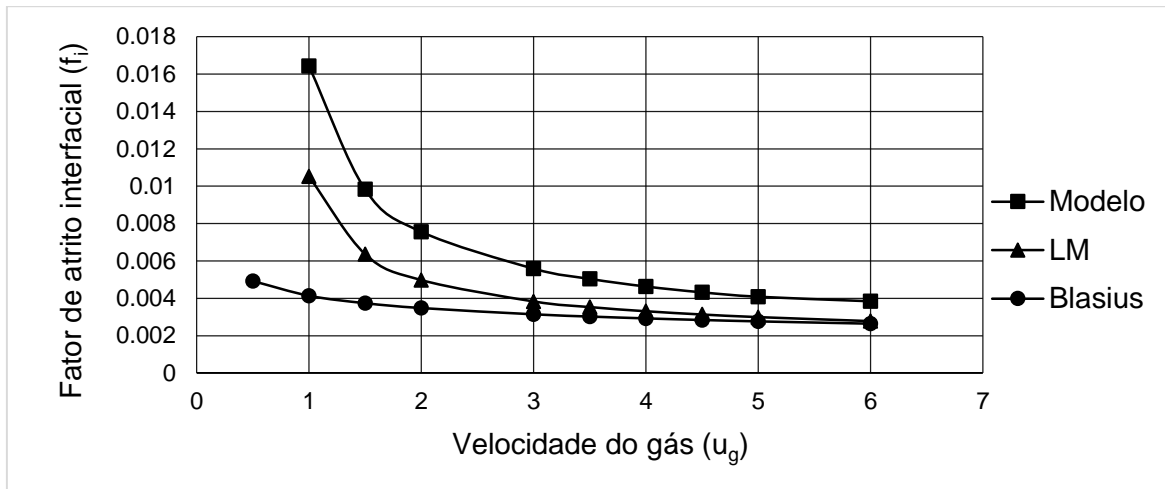
Figura 6.10: Gráfico de comparação dos resultados do presente modelo para escoamentos óleo-gás e água-ar.

Neste gráfico, estão representados os fatores de atrito em função do número de Reynolds da fase gasosa. É notável que ambos os casos apresentam o mesmo comportamento, porém, valores diferentes de acordo com o número de Reynolds, que nesse caso difere apenas nas considerações de viscosidade cinemática.

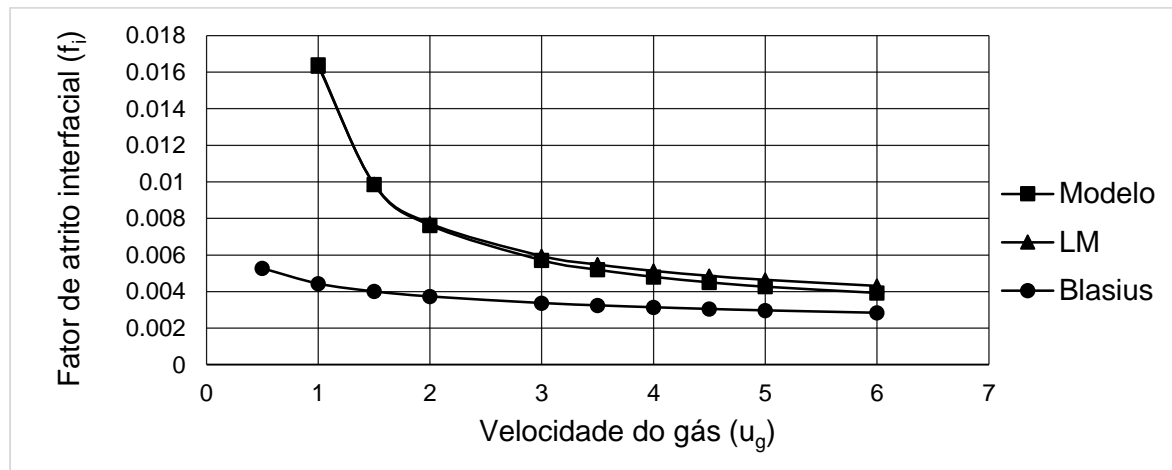
Em ambas as curvas, pode-se notar a presença de duas inclinações. Os valores calculados para velocidades mais baixas são muito maiores, gerando uma região mais íngreme na primeira parte da curva de atrito. Uma vez que nessa região os gradientes de velocidade são elevados, é esperado que os valores do fator de atrito também sejam maiores. Diferentemente do caso para canais, essa influência é muito maior devido a interação maior com as superfícies da tubulação.

6.2.2. Comparação com outros modelos

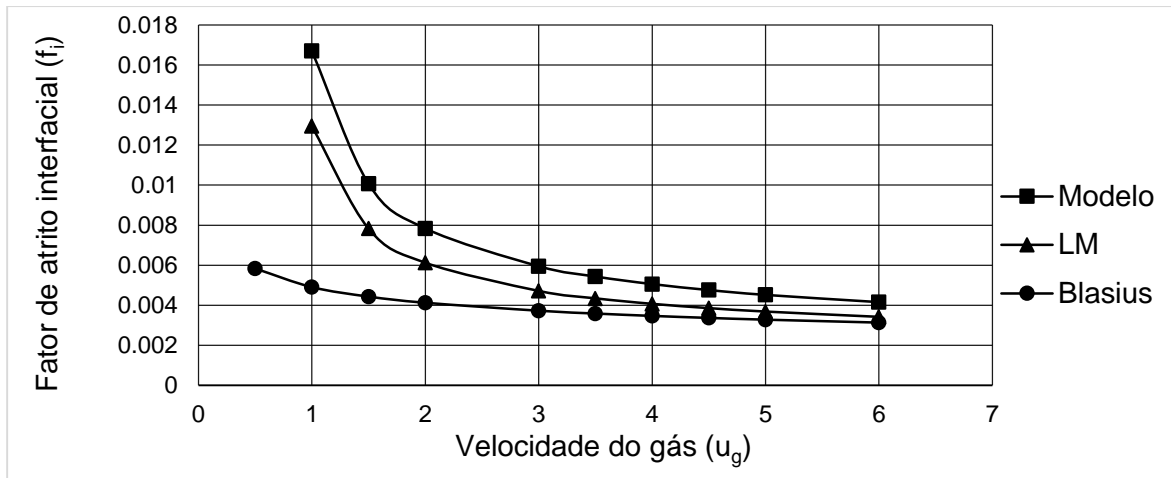
Neste tópico, vamos realizar uma análise de comparação com outros modelos apresentados na literatura. Considerando primeiramente o modelo de Lockhart e Martinelli (1949) e os valores da equação de Blasius, amplamente utilizada para o cálculo do fator de atrito entre fluido e superfície, construíram-se os gráficos a seguir para diferentes frações de gás.



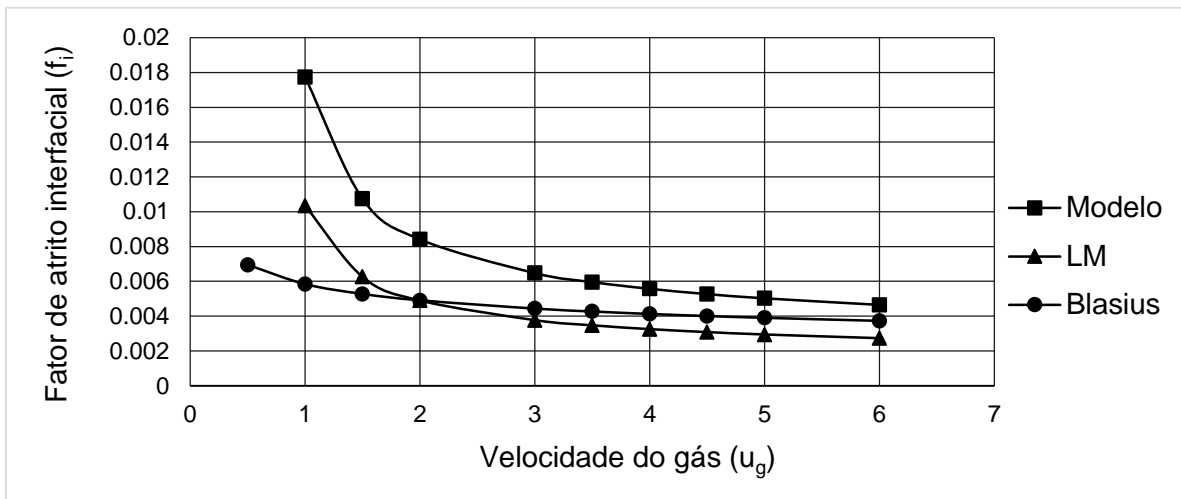
(a)



(b)



(c)

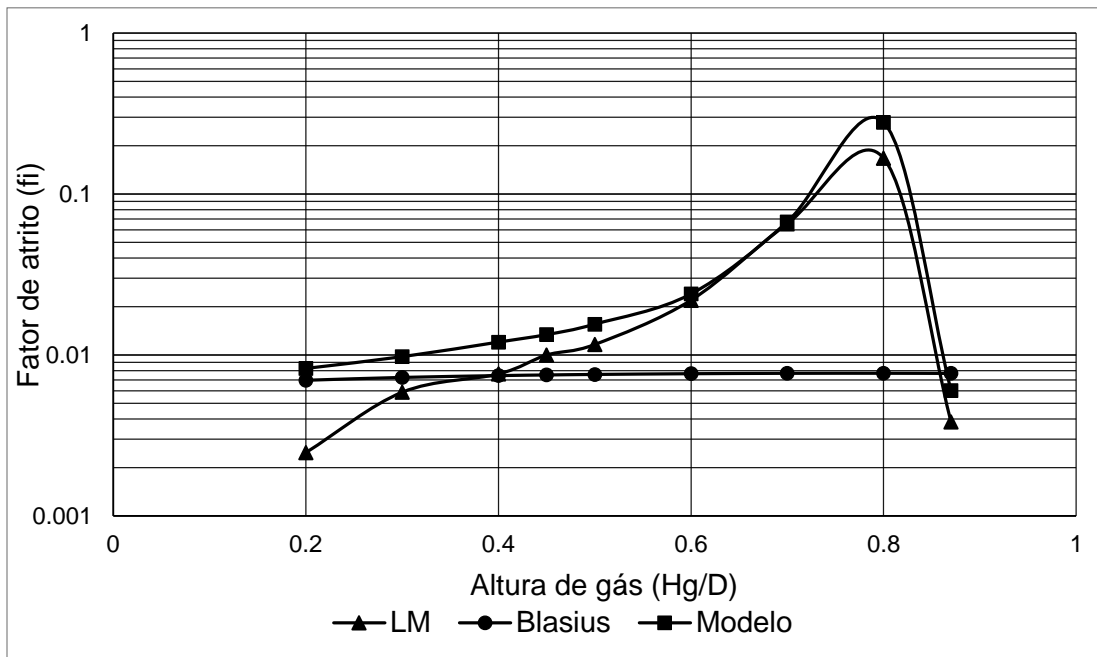


(d)

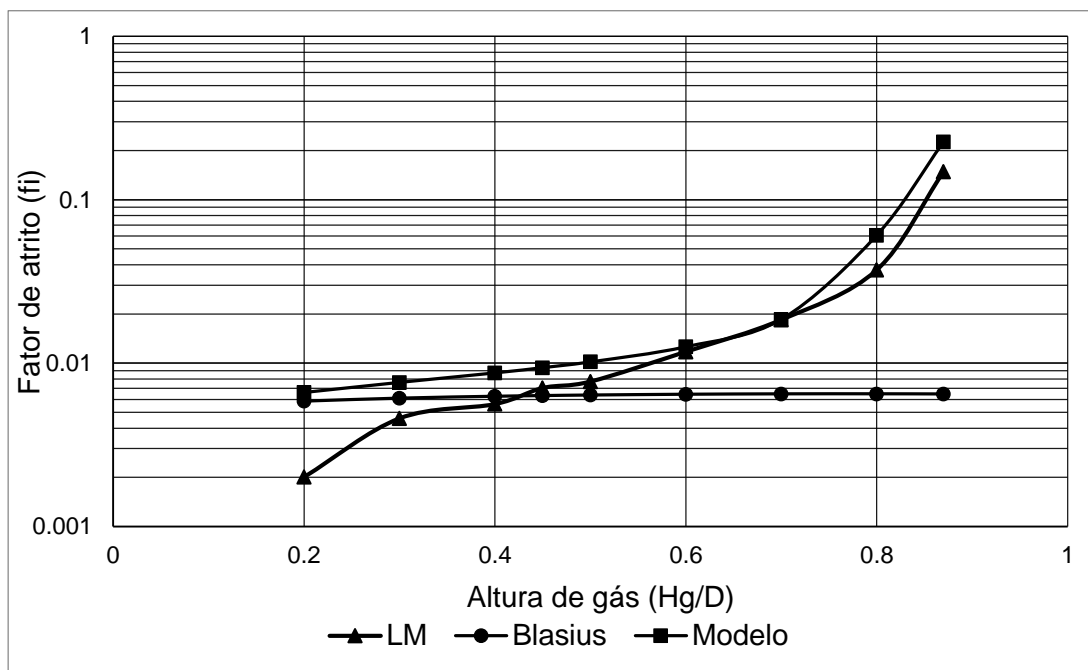
Figura 6.11: Gráfico de comparação dos resultados do presente modelo com os modelos de Lockhart-Martinelli e Blasius. Escoamento água-ar, 1 atm, 25°C, tubulação horizontal com 30 cm de diâmetro, velocidade de líquido de 0.4 m/s e frações de gás de (a) 80% (b) 60% (c) 40% e (d) 20%.

Nos gráficos da Figura 6.8 nota-se que os valores calculados do modelo são sempre maiores que os valores da equação de Blasius, usada para o cálculo do atrito com a superfície da tubulação, tendendo a ela para valores maiores de velocidade de fase do gás. Já os valores do modelo de Lockhart-Martinelli variam muito de acordo com a quantidade de gás presente na tubulação.

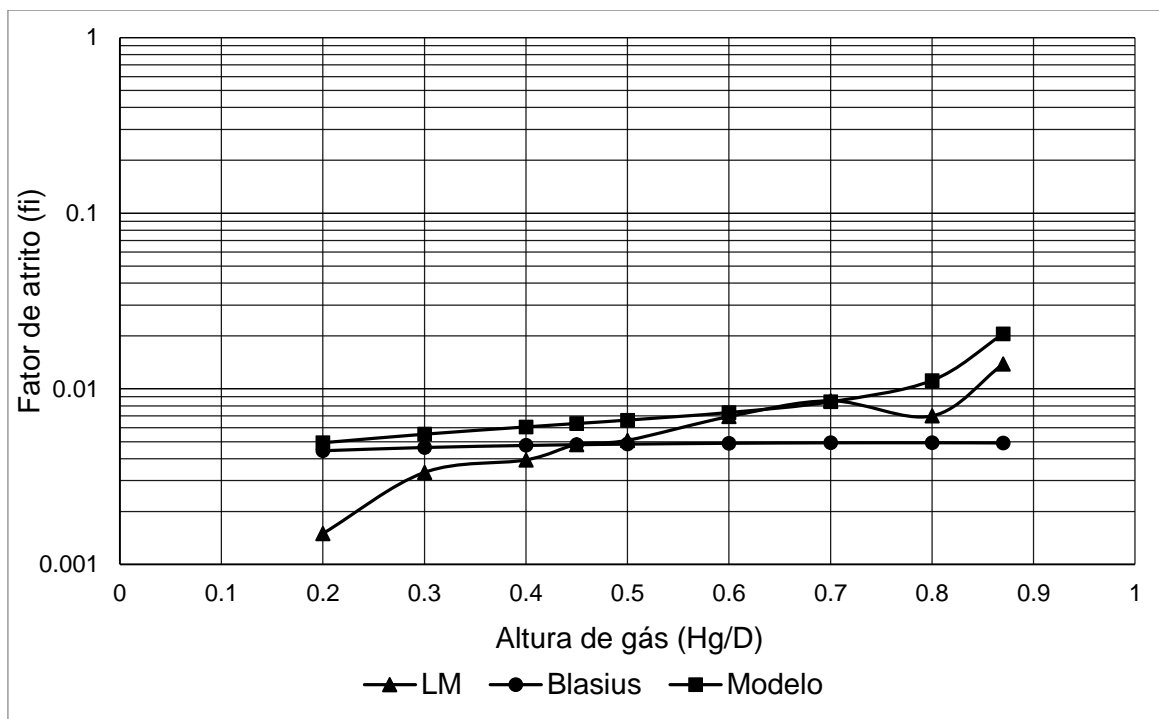
Outra maneira interessante de analisar estes dados, é através do gráfico que mostra a variação do fator de atrito em função da altura de gás adimensional, mantendo-se as vazões de gás e líquido constantes.



(a)



(b)

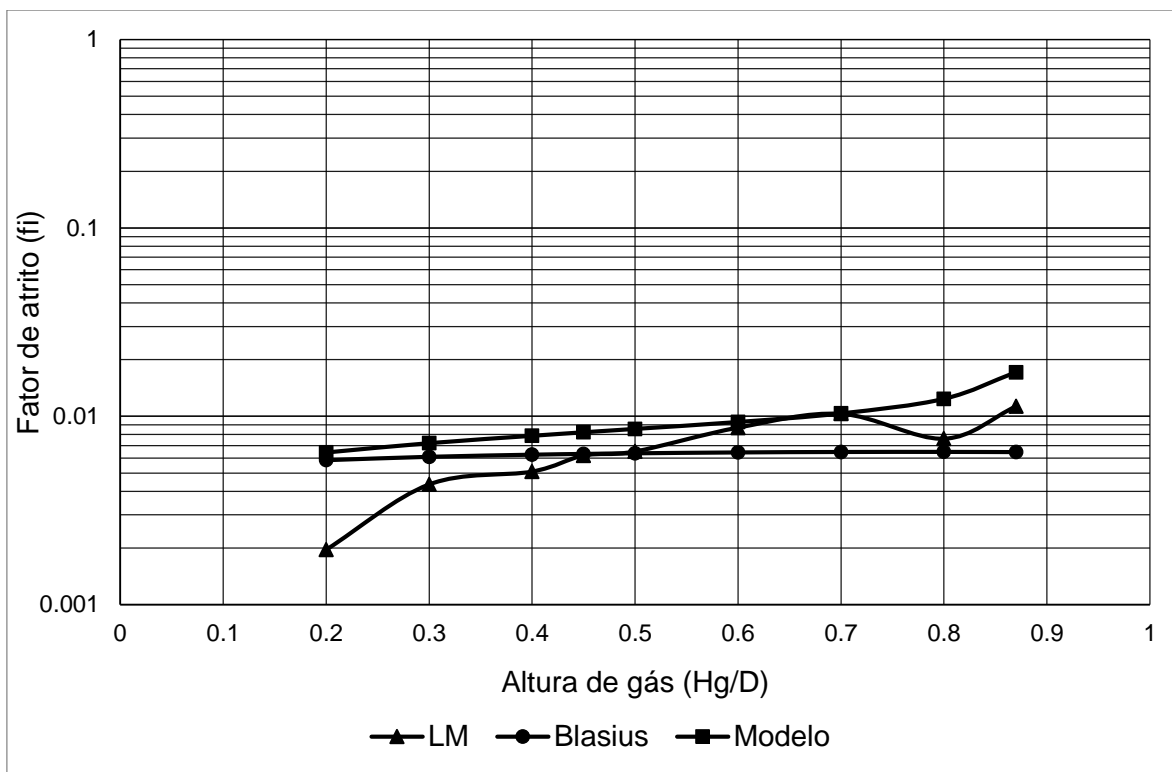


(c)

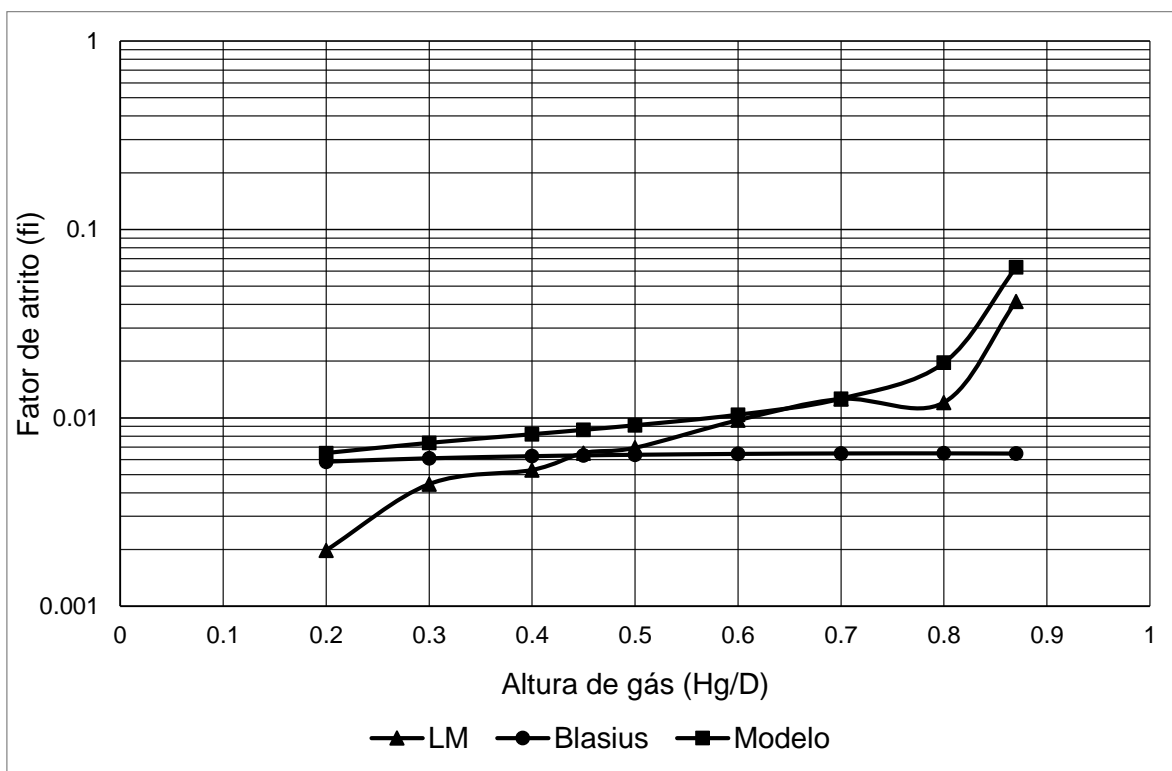
Figura 6.12: Gráfico de comparação dos resultados do presente modelo com os modelos de Lockhart-Martinelli e Blasius. Escoamento água-ar, 1 atm, 25°C, tubulação horizontal com 30 cm de diâmetro, velocidade de líquido de 0.014 m/s e velocidades de gás (a) 0.07 m/s (b) 0.015 m/s e (c) 0.042 m/s.

É importante notar que, diferentemente do que foi realizado para o modelo em canais, aqui as velocidades superficiais são mantidas constantes e não as velocidades de fase. Como as frações de gás são alteradas ao longo do gráfico, as velocidades de fase calculadas a partir das superficiais, também são.

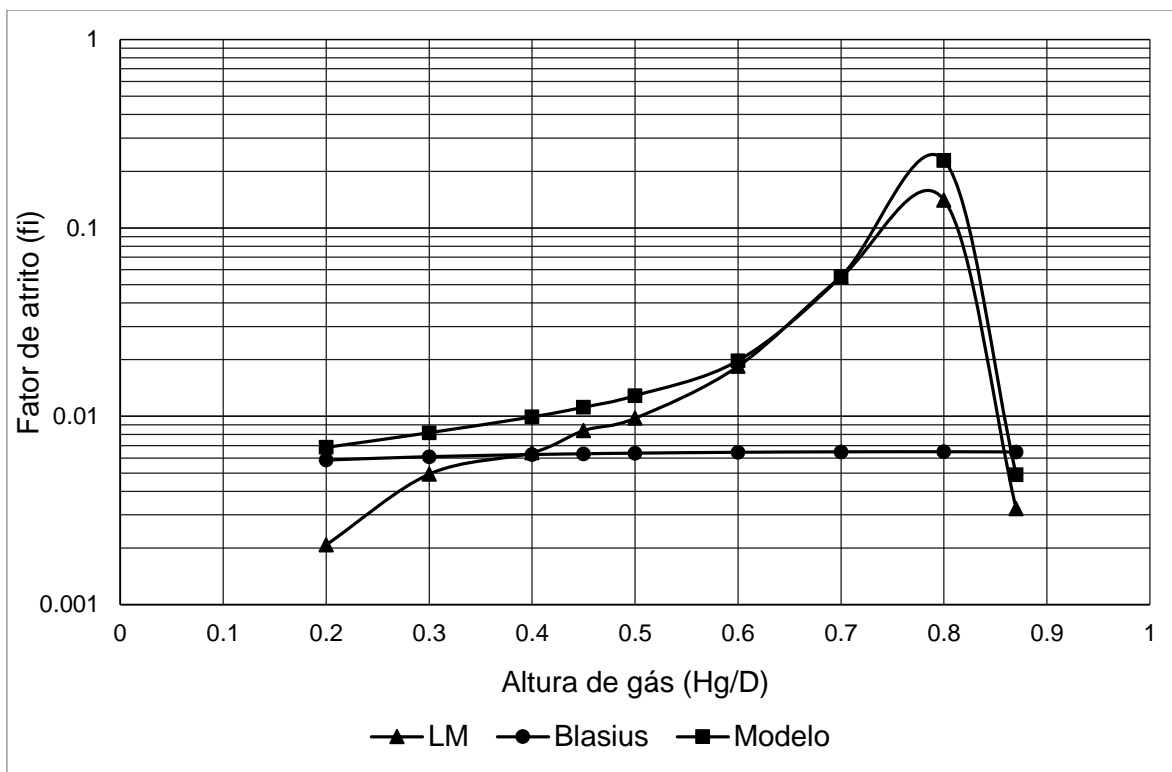
Nos gráficos, nota-se que em todos os casos o modelo tende à equação de Blasius para baixas frações de gás, diferentemente do modelo de Lockhart-Martinelli. Já para altas frações de gás e baixas velocidades, o modelo se aproxima primeiramente do modelo de Lockhart-Martinelli apresentando comportamento inesperado, que poderia ser explicado pela ocorrência de escoamento laminar, já que a velocidade de fase diminui consideravelmente. Conforme a vazão é aumentada, o modelo se torna crescente devido ao aumento da tensão interfacial com a fração de gás em toda região, diferentemente do modelo de Lockhart-Martinelli, que conhecidamente diverge para altas frações de gás.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.13: Gráfico de comparação dos resultados do presente modelo com os modelos de Lockhart-Martinelli e Blasius. Escoamento água-ar, 1 atm, 25°C, tubulação horizontal com 30 cm de diâmetro, velocidade de gás de 0.14 m/s e velocidades de líquido (a) 0.003 m/s (b) 0.007 m/s e (c) 0.03 m/s.

Na Figura 6.13 estão apresentados gráficos similares aos da Figura 6.12. Agora, no entanto, há variação das velocidades de líquido, mantendo as velocidades de gás constantes.

O comportamento agora observado é similar aos dos gráficos anteriores. Para baixas frações de gás, novamente o modelo apresenta boa correlação com a equação de Blasius. Porém, de forma contrária ao que acontece para a variação na velocidade de gás, o modelo apresenta uma divergência para altas velocidades em altas frações de gás. Enquanto o modelo de Lockhart-Martinelli também apresenta divergência nos extremos dos intervalos considerados. Também é interessante notar que para baixas velocidades de líquido, a curva do modelo proposto tende a colapsar com a curva de Blasius. Pode-se dizer que se a velocidade de líquido tendesse a zero, seria esperado que o fator de atrito se tornasse igual ao fator de atrito com a superfície, comportamento aqui corroborado.

Em ambas as Figuras 6.12 e 6.13, os gráficos não foram estendidos para os valores extremos porque o modelo de Lockhart-Martinelli divergia muito, dificultando a análise dos mesmos.

O modelo aqui proposto é apresentado em uma correlação mecanicista. Para comparar sua aplicabilidade com outras correlações, o gráfico abaixo é introduzido. De acordo com a disponibilidade de dados, algumas correlações citadas na Tabela 1 foram escolhidas para efeito de comparação.

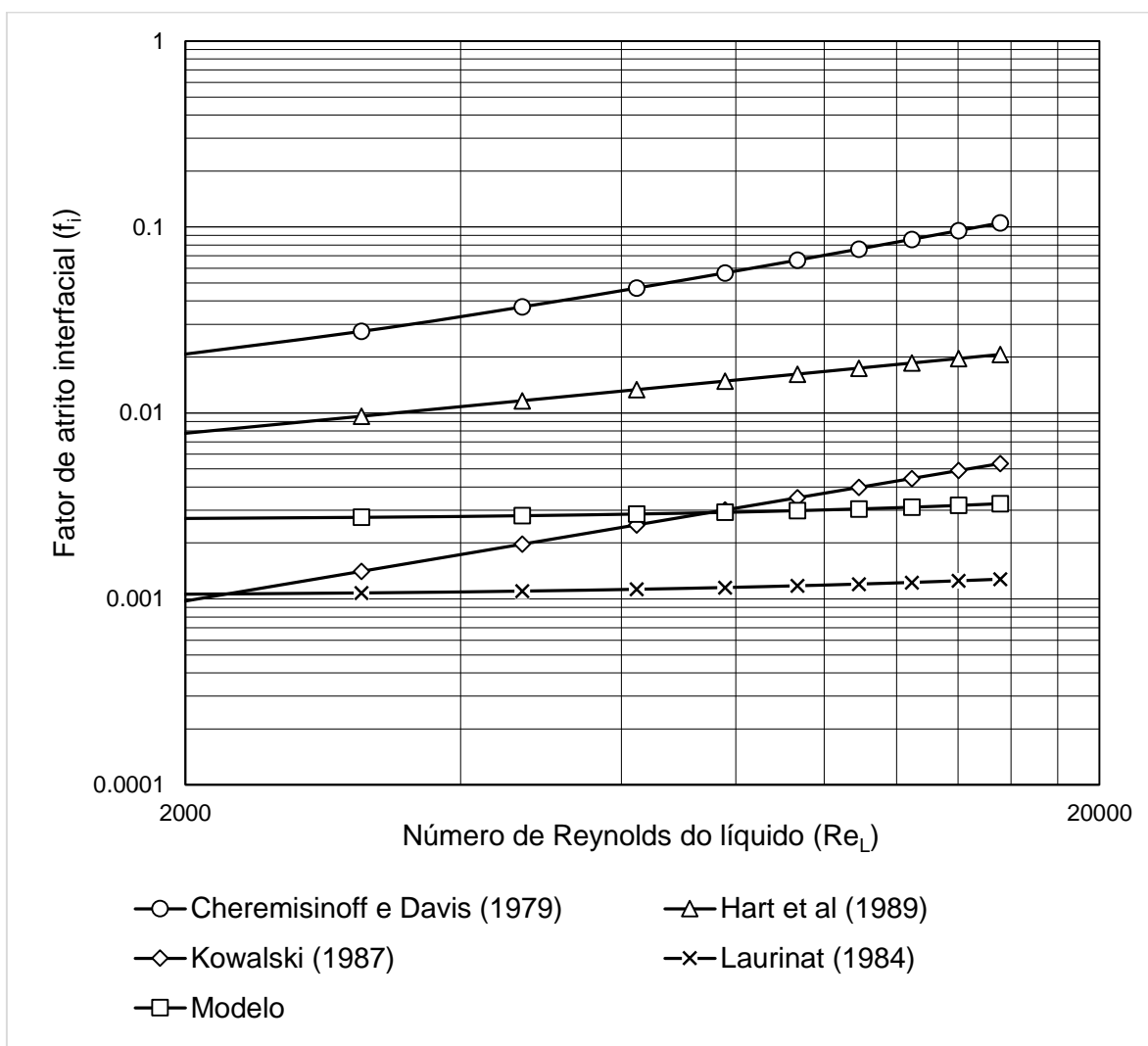


Figura 6.14: Gráfico de comparação. Escoamento óleo-gás, 68 atm, 38°C, tubulação horizontal com 30 cm de diâmetro, fração do gás de 60% e Reynolds de 60000.

De acordo com a disponibilidade de dados, as correlações de Cheremisinoff e Davis (1979), Kowalski (1987), Hart et al (1989) e Laurinat et al. (1984) foram utilizadas para gerar o gráfico acima. Como, diferentemente do modelo proposto, as correlações utilizadas utilizam o Reynolds do líquido como parâmetro, o fator de atrito foi calculado em função deste. É notável a grande discrepância existente entre os modelos. Cheremisinoff e Davis (1979) e Hart et al (1989) preveem valores muito altos, enquanto Kowalski (1987) apresenta resultados muito sensíveis ao número de Reynolds do líquido. Em questão de comportamento, o presente modelo e a correlação de Laurinat et al. (1984) são similares, apesar de calcularem valores discrepantes. Esse gráfico corrobora que o comportamento do modelo está dentro do esperado.

6.2.3. Gráfico do parâmetro de Lockhart-Martinelli

A partir das equações de quantidade de movimento para as fases líquida e gasosa, Taitel e Dukler (1976) obtiveram a equação adimensional a seguir.

$$-X^2 \tilde{f}_L \frac{\tilde{P}_L}{\tilde{A}_L} \tilde{u}_L^2 + \left[\tilde{f}_G \frac{\tilde{P}_G}{\tilde{A}_G} \tilde{u}_G^2 + \tilde{f}_i \left(\frac{\tilde{P}_i}{\tilde{A}_G} + \frac{\tilde{P}_i}{\tilde{A}_L} \right) \tilde{u}_R^2 \right] - 4Y = 0 \quad (6.1)$$

Na qual X é o parâmetro adimensional de Lockhart-Martinelli; Y é a inclinação adimensional da tubulação; $\tilde{f}_{i,G,L}$ são os fatores de atrito adimensionais interfacial, do gás e do líquido; $\tilde{u}_{R,G,L}$ são as velocidades adimensionais relativa, do gás e líquido; $\tilde{P}_{i,G,L}$ são os perímetros adimensionais molhados da interface, do gás e do líquido; $\tilde{A}_{G,L}$ são as áreas adimensionais das seções transversais ocupada pelo gás e pelo líquido.

Os parâmetros adimensionais da equação estão descritos a seguir.

$$\tilde{f}_G = f_G / f_{SG} \quad (6.2)$$

$$\tilde{f}_L = f_L / f_{SL} \quad (6.3)$$

$$\tilde{f}_i = f_i / f_{SG} \quad (6.4)$$

$$\tilde{P}_{i,G,L} = P_{i,G,L} / D \quad (6.5)$$

$$\tilde{A}_{i,G,L} = A_{i,G,L}/D^2 \quad (6.6)$$

$$\tilde{u}_{G,L} = u_{G,L}/u_{SG,SL} \quad (6.7)$$

$$\tilde{u}_R = (u_G - u_i)/u_{SG} \quad (6.8)$$

Nas quais $f_{i,G,L,SG,SL}$ são os fatores de atrito interfacial, do gás, do líquido, superficial do gás e superficial do líquido; $u_{G,L,SG,SL}$ são as velocidades do gás, do líquido, superficial do gás e superficial do líquido; $P_{i,G,L}$ são os perímetros molhado da interface, do gás e do líquido; $A_{i,G,L}$ são as áreas das seções transversais ocupadas pela interface, pelo gás e pelo líquido; D é o diâmetro da tubulação.

O parâmetro de Lockhart-Martinelli é definido como:

$$X^2 = \left| \frac{\left(\frac{dP_F}{dx}\right)_{SL}}{\left(\frac{dP_F}{dx}\right)_{SG}} \right| \quad (6.9)$$

Pode-se observar que ele representa a relação entre as quedas de pressão no líquido e no gás.

A solução dessa equação resulta nos valores de nível de líquido de equilíbrio para determinadas perdas de pressão e inclinação. Estes resultados estão apresentados no gráfico a seguir. Para a resolução deste gráfico, foram usados valores do fator de atrito interfacial iguais aos valores do fator de atrito para a velocidade superficial.

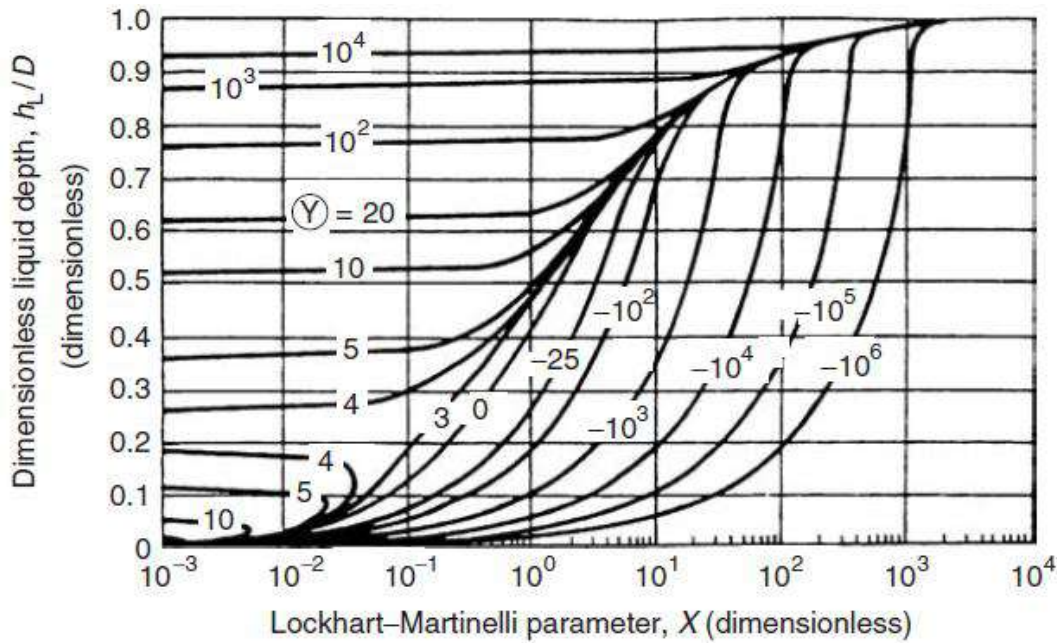


Figura 6.15: Níveis de líquido em escoamentos estratificados bifásicos para $f_i/f_{SG} = 1$.
(Crowley e Rathe, 1988)

Em escoamentos inclinados positivamente, existe uma divisão das curvas em dois segmentos. Conforme o nível de líquido é aumentado mantendo-se constantes as velocidades superficiais do gás e do líquido, a velocidade de fase do líquido é reduzida enquanto a velocidade de fase do gás aumentada. Assim, a partir de um certo nível, os efeitos gravitacionais se tornam importantes e a fase líquida começa a retornar, gerando escoamento reverso. Conforme o nível de líquido é aumentado mais ainda, o gás é acelerado, gerando um aumento nos fatores de atrito interfacial e superficial. Essa aceleração cria, então, um arrasto na fase líquida que volta a acelerar. Assim, surge a parte superior da curva, que delimita o intervalo onde acontece escoamento reverso em tubulações inclinadas positivamente. Esse fenômeno pode ser encontrado com mais detalhes em Landman (1991).

Agora, utilizando o modelo aqui apresentado, vamos realizar a mesma análise, partindo, porém, dos valores de nível de líquido para calcular o parâmetro de Lockhart-Martinelli.

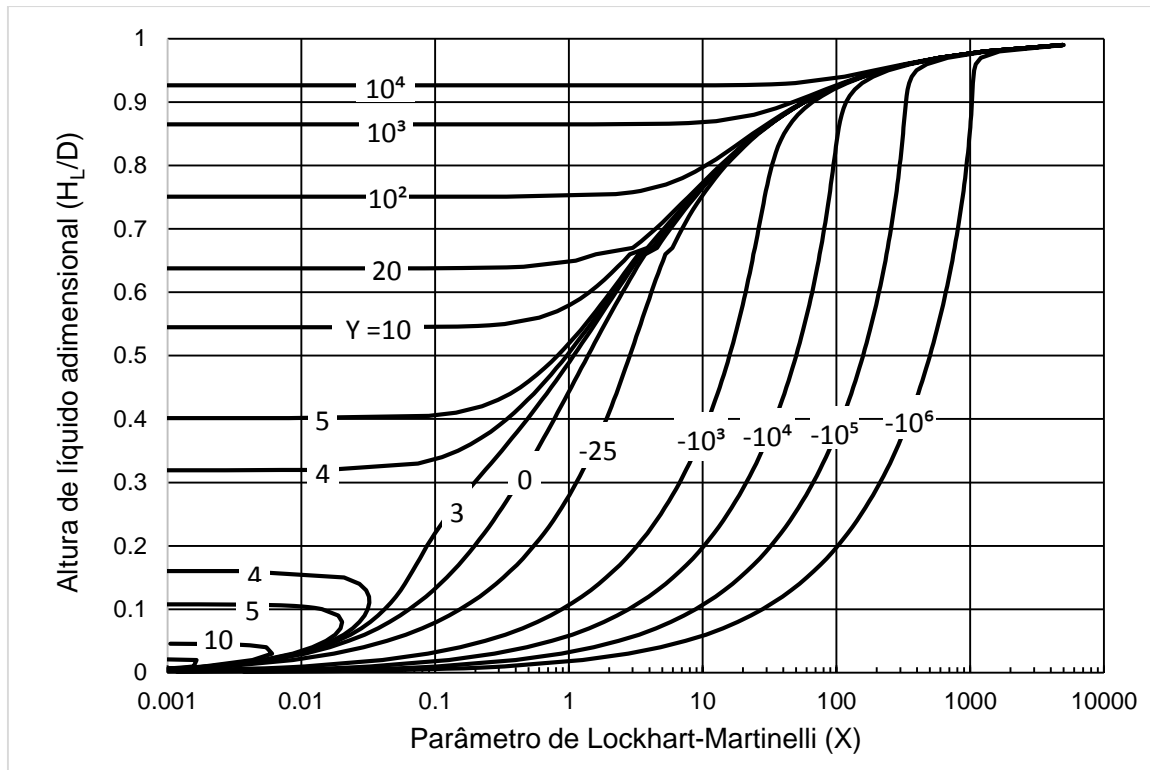


Figura 6.16: Níveis de líquido em escoamentos estratificados bifásicos.

É notável que os gráficos são correspondentes, o que mais uma vez corrobora o comportamento adequado do modelo. A alteração do fator de atrito interfacial, que agora passa a ser maior que os valores do fator de atrito superficial, resultou em curvas similares para ângulos negativos (tubulação descendente). Já para os casos de ângulos positivos (tubulação ascendente), os valores superiores de nível de líquido se tornaram um pouco maiores, com exceção dos valores de Y a partir de 100 que se mostraram iguais, enquanto os valores das curvas inferiores, se tornaram mais baixos. Esse resultado mostra um aumento no intervalo onde o escoamento de líquido é reverso.

Conforme analisado anteriormente, o fator de atrito interfacial do modelo é superior ao fator de atrito superficial do gás para baixos níveis de líquido, enquanto para altos níveis de líquidos, esses valores se aproximam. Assim, conforme aumenta-se os níveis de líquido, a razão f_i/f_{SG} tende a ser decrescente, porém sempre superior à um. Quando o nível de líquido é baixo, o atrito gerado desacelera ainda mais a fase gasosa e a transição para escoamento reverso ocorreria mais cedo. Já quando o nível de líquido é alto, o atrito ainda superior ao analisado na Figura 6.15, também contribui para a desaceleração do gás e, conseqüentemente, retarda a volta da aceleração do líquido.

6.2.4. Cálculos de perda de carga

Como o objetivo principal do estudo de fatores de atrito é o cálculo da perda de carga, realizou-se uma análise do modelo para comparação com os dados de Badie et al (2000). Os dados foram recolhidos de um experimento com baixa carga de líquido e diâmetro pequeno (0.078 m) realizado em laboratório para sistemas água-ar (água com massa específica 1000 kg/m³ e viscosidade cinemática 10⁻⁶ m²/s) e óleo-ar (óleo com massa específica 865 kg/m³ e viscosidade cinemática 4,6.10⁻⁵ m²/s).

Utilizando o modelo proposto, a perda de carga foi calculada através de um procedimento simples. Primeiramente, um certo nível de gás (Hg/D) era assumido para a realização do cálculo do fator de atrito interfacial. Os fatores de atrito superficiais foram calculados pela equação de Blasius para tubulações. A partir dos valores resultantes de fator de atrito, as perdas de carga tanto para o gás quanto para o líquido eram calculadas pelas equações de quantidade de movimento apresentadas abaixo. Se a perda de carga no líquido não correspondesse à perda de carga no gás, um novo nível de gás era assumido até que os valores dos gradientes de pressão fossem o mesmo para o gás e para o líquido.

$$-A_G \left(\frac{dP}{dx} \right)_G - \tau_{WG} S_G - \tau_i S_i - \rho_G A_G g \sin \theta = 0 \quad (6.10)$$

$$-A_L \left(\frac{dP}{dx} \right)_L - \tau_{WL} S_L + \tau_i S_i - \rho_L A_L g \sin \theta = 0 \quad (6.11)$$

Nas equações acima, A é a área transversal ocupada pela fase; S é o perímetro da área ocupada pela fase; τ é a tensão; ρ é a massa específica do fluido; g é a aceleração da gravidade e θ é o ângulo de inclinação da tubulação, que para esse caso é zero.

Vale ressaltar que os cenários de escoamento experimentados por Badie *et al* (2000) estão dentro da região do padrão estratificado ondulado no mapa de Taitel e Dukler (1976) tanto para o escoamento água-ar como para o óleo-ar. Na figura a seguir, está demonstrado no mapa o intervalo considerado para o caso água-ar, que é análogo ao observado para o caso óleo-ar. O modelo proposto considera apenas o padrão estratificado liso. Assim, aqui também será proposto um método para adaptação dos cálculos para o caso do escoamento estratificado ondulado.

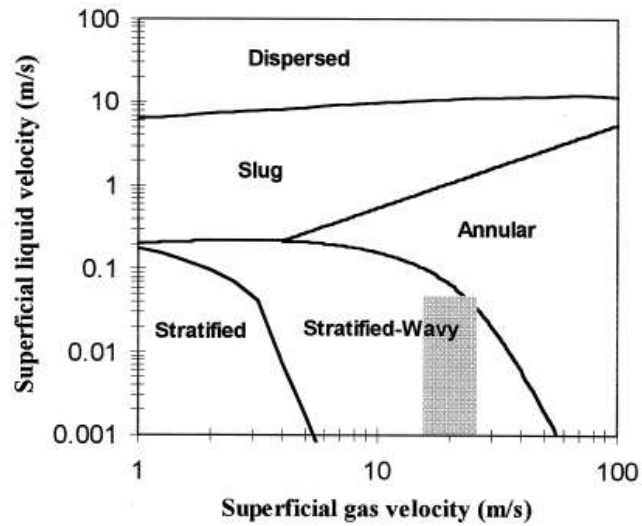


Figura 6.17: Região dos dados para o escoamento água-ar no mapa de Taitel e Dukler (1976). (Badie *et al*, 2000)

Considerando ambos os casos água-ar e óleo-ar, calculou-se a perda de pressão como descrito anteriormente utilizando o modelo para escoamento estratificado lisos. Os resultados estão descritos nos gráficos a seguir.

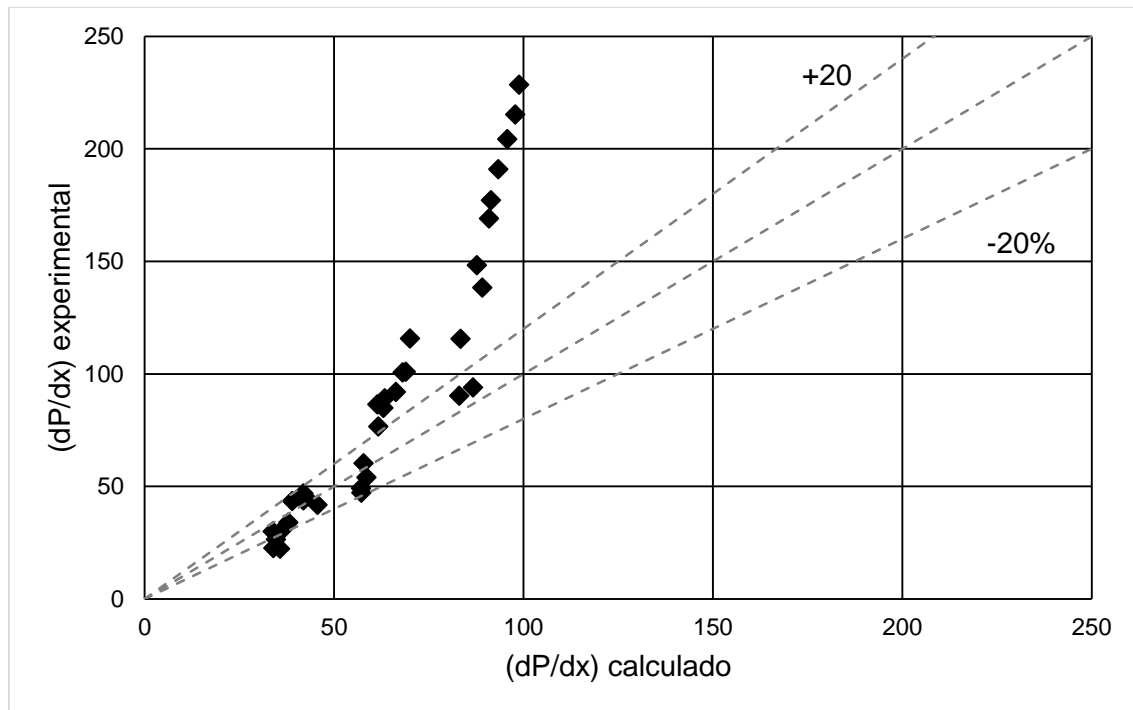


Figura 6.18: Comparação dos dados experimentais de Badie *et al* (2000) para escoamentos água-ar com os valores calculados utilizando o modelo apresentado.

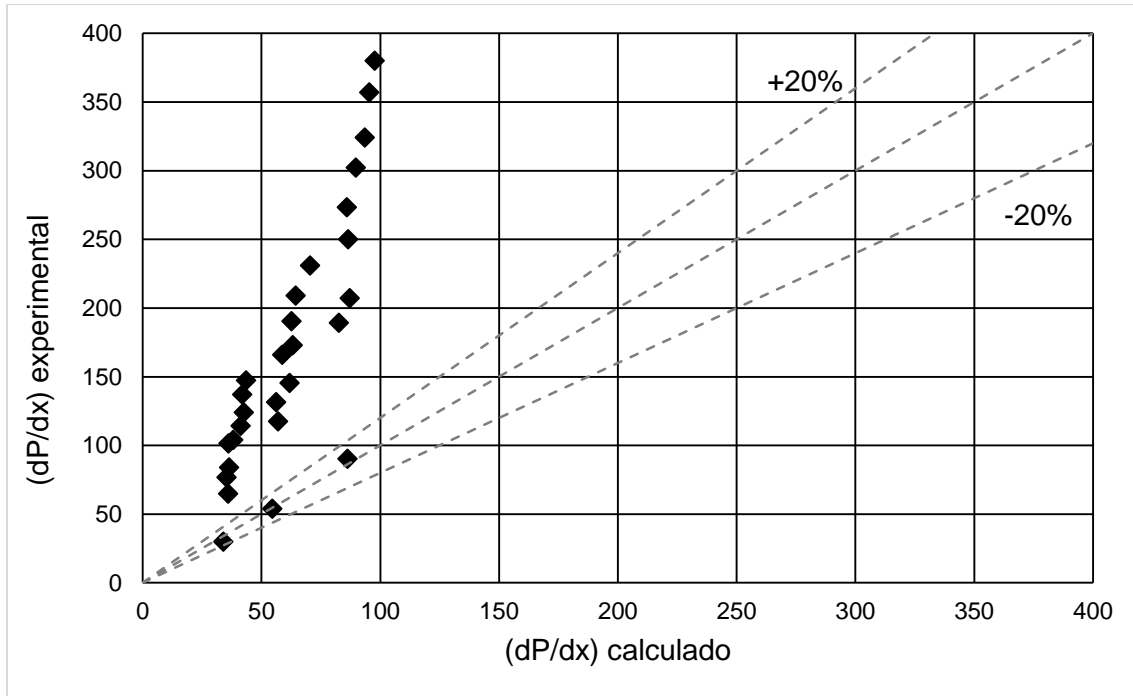


Figura 6.19: Comparação dos dados experimentais de Badie *et al* (2000) para escoamentos óleo-ar com os valores calculados utilizando o modelo apresentado.

É interessante notar que para o caso água-ar, quando as velocidades são baixas, o modelo apresenta bons resultados devido à menor presença de ondas.

Uma vez que o modelo claramente subestima o gradiente de pressão para escoamentos estratificados ondulados, é interessante introduzir uma forma de corrigir esses valores para estender o intervalo de atuação do modelo. O aparecimento de ondas na interface entre os fluidos está relacionado com a interação entre eles. Conforme a velocidade dos fluidos aumenta, essas ondas tendem a crescer aumentando sua complexidade e introduzindo mais perdas ao sistema.

Nesse sentido, uma maneira de estender o modelo seria adicionar ao cálculo da perda de carga, uma energia extra transferida às ondas. Essa energia deve depender da altura das ondas, das velocidades dos fluidos e da área ocupada por eles, uma vez que o diâmetro da tubulação também interfere no aparecimento das ondas. Fazendo um paralelo com a altura de ondas no oceano e uma análise dimensional, as seguintes equações são propostas.

$$H_{onda} = \frac{b}{g} u_{SG} u_{SL} \quad (6.12)$$

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)_{ondas} = c \rho_L g H_{onda}^2 \left(\frac{P_i}{A_L}\right)^2 \quad (6.13)$$

Nas quais b e c são constantes a serem calibradas; $u_{SG,SL}$ são as velocidades superficiais do gás e do líquido; g é a aceleração da gravidade; ρ_L é a massa específica de líquido; P_i é o perímetro da interface e A_L é a área transversal ocupada pelo líquido.

A escolha do produto das velocidades para o cálculo da altura de onda é baseada no fato de que ambas as velocidades influenciam nesse parâmetro, mesmo que as velocidades de líquido ou gás sejam muito pequenas. É intuitivo também pensar que conforme as estruturas de onda crescem, a energia transferida à elas também deveria crescer causando aumento do atrito. Além disso, aqui foram consideradas os valores b/g igual à 0.001 e c, 0.25 e 3 para os casos água-ar e óleo-ar, respectivamente.

Agora, novamente considerando ambos os casos água-ar e óleo-ar, adicionou-se à perda de pressão calculada, os valores das energias de onda resultantes das equações propostas. Os resultados estão descritos no gráfico a seguir.

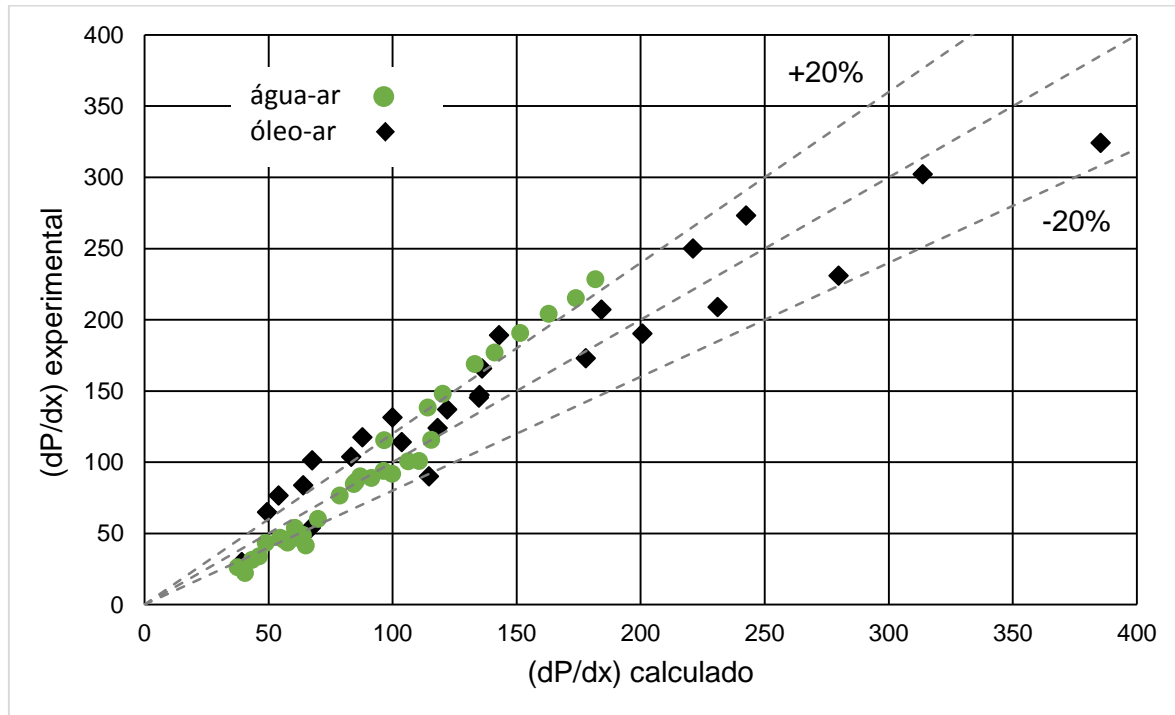


Figura 6.20: Comparação dos dados experimentais de Badie *et al* (2000) com os valores calculados utilizando o modelo apresentado com a introdução da energia de ondas.

Como pode-se observar, os resultados encontrados foram satisfatórios. Todos os pontos se apresentam dentro de aproximadamente 20% dos resultados experimentais, modelagem bastante razoável em problemas de engenharia.

Todos os dados utilizados e encontrados podem ser encontrados com detalhe no Apêndice D.

6.2.5. Análise Geral

Primeiramente, com o objetivo de prever o comportamento da correlação com a variação de seus parâmetros, o modelo foi testado para diferentes vazões de gás e líquido em escoamentos água-ar e óleo-gás. Estes resultados foram então comparados com modelos presentes na literatura, dentro da variação novamente de alguns parâmetros, a fim de observar a disparidade entre eles. Em seguida, realizou-se uma análise do parâmetro de Lockhart-Martinelli, para observar se o modelo era capaz de prever a relação nos gradientes de pressão. Por fim, cálculos de perda de carga foram executados para prever se a correlação funcionava corretamente na situação em que seria utilizada.

Na primeira etapa de avaliação, o modelo apresentou boa coerência de acordo com a variação dos parâmetros do escoamento, demonstrando comportamento físico adequado. A comparação com os modelos de Lockhart-Martinelli e Blasius também se mostraram satisfatórias.

Em seguida, na avaliação do parâmetro de Lockhart-Martinelli, pôde-se observar que os valores do fator de atrito interfacial afetam o nível de fluido de equilíbrio e que os valores calculados estavam dentro do esperado.

Finalmente, os cálculos de perda de pressão mostraram que o modelo é capaz de prever perdas de pressão satisfatórias para escoamentos estratificados com interface lisa e que para o cálculo em escoamentos estratificados ondulados seria necessária uma correção para incorporar o efeito produzido pelo surgimento das ondas. Essa correção foi realizada através do cálculo de uma energia, proposta com base nos efeitos de transferência de energia de ondas oceânicas, e se mostrou satisfatória para os dados experimentais analisados.

Capítulo 7

7. Conclusão

A predição de escoamentos multifásicos é de grande importância para a indústria. O cálculo do fator de atrito interfacial para estes tipos de escoamento ainda é um desafio. Para prever corretamente esses fatores de atrito, o desenvolvimento de correlações precisas e relativamente simples é essencial, tornando a modelagem de escoamentos mais acessível aos cronogramas de engenharia.

Assim, neste trabalho, uma nova equação fundamentada em primeiros princípios foi deduzida com o objetivo de prever o fator de atrito interfacial. Não há na literatura correlação baseada em princípios físicos capaz de prever com precisão o atrito entre fases. O cálculo da perda de carga é de grande importância para a indústria e a melhor descrição de fenômenos em escoamentos estratificados poderá servir como base para outros tipos de escoamentos problemáticos em presentes em processos.

A equação apresentada para escoamentos em canais não apresenta aplicações de engenharia. Contudo, apresentou boas informações de comportamento e foi uma excelente alavanca na construção do modelo para tubulações.

O modelo para o cálculo do fator de atrito interfacial em tubulação para escoamentos bifásicos estratificados apresentou bons resultados. A avaliação dos valores calculados para diversas situações permitiu chegar à conclusão de que a correlação representa bem os fenômenos físicos representados. Além de apresentar o comportamento desejado, a correlação foi capaz de calcular valores acurados e considerar diferentes tipos de fluidos. O cálculo da perda de pressão também apresentou bons resultados, dentro do objetivo esperado para o modelo.

A metodologia e os resultados aqui apresentados podem ser estendidos para o estudo da transição entre padrões de escoamento e do atrito em *slugs* para escoamentos bifásicos. Sugestões para trabalhos futuros também incluem a realização de experimentos para reforçar a efetividade do modelo e análises de sensibilidade do parâmetro de viscosidade dos fluidos.

8. Referências Bibliográficas

- Andreussi, P., Asali, J. C. e Hanratty, T. J., *Initiation of Roll Waves in Gas-Liquid Flows*. AIChE J. 31, No.1, 119-126 (1985).
- Andreussi, P. e Persen, L. N., *Stratified Gas-Liquid Flow in Downwardly Inclined Pipes*. Int. J. Multiphase Flow 13, No.4, 565-575 (1987).
- Andritsos, N. e Hanratty, T. J., *Influence of Interfacial Waves in Stratified Gas-Liquid Flows*. AIChE J. 33, No.3, 444-454 (1987a).
- Andritsos, N., Hanratty, T.J., *Interfacial instabilities for horizontal gas-liquid flows in pipelines*. Int. J. Multiphase Flow 13, 583-603 (1987b).
- Badie, S., Hale, C.P., Lawrence, G.F., Hewitt, G.F., *Pressure gradient and holdup in horizontal two-phase gas-liquid flows with low liquid loading*. Int. J. Multiphase Flow 26, 1525-1543 (2000).
- Baker, O., *Simultaneous Flow of Oil and Gas*. Oil and Gas J., 53 (12), 185 (1954).
- Barnea, D., Shoham, O., and Taitel, Y., *Flow pattern transition for down ward inclined two-phase flow: horizontal to vertical*, Chem. Eng. Sci., 37, 735-740 (1982a).
- Batchelor, G. K., *An Introduction to Fluid Dynamics*. 1 ed. Cambridge, Cambridge University Press (1967).
- Bendiksen, K. H., Maines, D., Moe, R. e Nuland, S., *The Dynamic Two-Fluid Model OLGA: Theory and Application*. SPE 19451 (1989).
- Boomkamp, P.A.M., Miesen, R.H.M., *Classification of instabilities in parallel two-phase flow*. Int. J. Multiphase Flow 22, 67-88 (1996).
- Brill, J.P., Mukherjee, H. *Multiphase Flow in Well.*, SPE. Society of Petroleum Engineering, Henry L. Doherty Series (1999).
- Cheremisinoff, N. P., Davis, E. J., *Stratified Turbulent-Turbulent Gas-Liquid Flow*. AIChE J. 25, No.1, 48-56 (1979).
- Chen, T., Cai, X.D., Brill, J.P., *Gas-liquid stratified-wavy flow in horizontal pipelines*. J. Energy Resour. Technol. 119, 209-216 (1997).

- Cohen, L. S. e Hanratty, T. J., *Effect of Waves at a Gas-Liquid Interface on a Turbulent Air Flow*. J. Fluid Mech.31, No.3, 467-479 (1968).
- Crowe, C. T., *Multiphase Flow Handbook*. Florida, Taylor & Francis Group (2006).
- Crowley, C.J. and Rathe, P.H., Assessment of mechanistic two-phase analysis methods for gas/condensate pipelines, PSIG Annual Meeting, Toronto, October, 20–21, 1988.
- Daly, B. J. e Harlow, F. H., *A Model of Countercurrent Steam-Water Flow in Large Horizontal Pipes*. Nuclear Sci. and Eng. 77, 273-284 (1981).
- Dukler, A.E. and Hubbard, M.G., *Model for gas–liquid flow in horizontal and near-horizontal tubes*. Ind. Eng. Chem. Fundam., 14, 337–347, 1975.
- Dukler, A.E. and Taitel, Y., *Flow pattern transitions in gas–liquid systems. Measurements and modelling*, Multiphase Science and Technology, Vol. II, G.F. Hewitt, J.M. Delhaye, and N. Zuber, Eds., Hemisphere, Washington, DC (1986).
- Fernandino, M., Ytrehus, T., *Determination of flow sub-regimes in stratified air–water channel flow using LDV spectra*. Int. J. Multiphase Flow 32, 436–446 (2006).
- García, D. E., Rodríguez, D., de Paula, I. B., Nieckele, A. O., *Linear stability analysis of stratified two-phase flow in a plane channel using numerical simulations*. ENCIT, Vitória-ES (2016).
- Hart, J., Hamersma, P. J. and Fortuin, J. M., *Correlations Predicting Frictional Pressure Drops and Liquid Holdup During Horizontal Gas-Liquid Pipe Flow with a Small Liquid Holdup*. Int. J. Multiphase Flow 15, No.6, 947-964 (1989).
- Hoogendoorn, C. J., *Gas-Liquid Flow in Horizontal Pipes*. Chem. Eng. Sci., 9,205 (1959).
- Johannessen, T., *A Theoretical Solution of the Lockhart and Martinelli Flow Model for Calculating Two-Phase Flow Pressure Drop and Holdup*. Int. J. Heat Mass Transfer, 15, 1443 (1972).
- Kim, H. J., Lee, S. C. and Bankoff, S. G., *Heat Transfer and Interfacial Drag in Countercurrent Steam-Water Stratified Flow*. Int. J. Multiphase Flow 11, No.5, 593-606 (1985).
- Kowalski, J. E., *Wall and Interfacial Shear Stress in Stratified Flow in a Horizontal Pipe*. AIChE J. 33, No.2, 274-281 (1987).

- Kuru, W.C., Sangalli, M., Uphold, D.D., McCreedy, M.J., *Linear stability of stratified channel flow*. Int. J. Multiphase Flow 21, 733–753 (1995).
- Laurinat, J. E., Hanratty, T. J., Dallman, J. C., *Pressure Drop and Film Height Measurements for Annular Gas-Liquid Flow*. Int. J. Multiphase Flow 10, No.3, 341-356 (1984).
- Lee, S. C. e Bankoff, S. G., *Stability of Steam-Water Countercurrent Flow in an Inclined Channel: Flooding*. J. of Heat Transfer 105, 713-718 (1983).
- Lin, P. Y. e Hanratty, T. J., *Prediction of the Initiation of Slug with Linear Stability Theory*. Int. J. Multiphase Flow 12, No.1, 79-98 (1986).
- Lockhart, R. W., and R. C. Martinelli, *Proposed Correlation of Data for Isothermal Two-Phase, Two-Component Flow in Pipes*. Chem. Eng. Prog., 45, 39 (1949).
- Mandhane, J. M., G. A. Gregory, and K. Aziz. *A Flow Pattern Map for Gas-Liquid Flow in Horizontal Pipes*. Intern. J. Multiphase Flow, 1,537-553 (1974).
- Miya, M., Woodmansee, D. E. and Hanratty, T. J., *A Model for Roll Waves in Gas-Liquid Flow*. Chern. Eng. Sci. 26, 1915-1931 (1971).
- Moody, L.F., *Friction factors for pipe flow*. Trans. ASME, 671 (1944).
- Ouyang, L. B. e Aziz, K., *Development of New Wall Friction Factor and Interracial Friction Factor Correlations for Gas-Liquid Stratified Flow in Wells and Pipelines*. SPE 35679 (1996).
- Qu, W., Yoon, S. M. e Mudawar, I., *Two-Phase Flow and Heat Transfer in Rectangular Micro-Channels*. Transactions of the ASME, Vol. 126 (2004).
- Ramirez, M. G., *Uma Equação de Atrito Explícita para Escoamento Turbulento de Fluidos Não Newtonianos Puramente Viscosos*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil (2015).
- Shi, J., Kocamustafaogullari, G., *Interfacial measurements in horizontal stratified flow patterns*. Nucl. Eng. Des. 149, 81–96 (1994).
- Shoham, O. e Taitel, Y., *Stratified Turbulent-Turbulent Gas-Liquid Flow in Horizontal and Inclined Pipes*. AIChE J. 30, No.3, 377-385 (1984).
- Spedding, P.L., Hand, N.P., *Prediction in stratified gas-liquid co-current flow in horizontal pipelines*. Int. J. Heat Mass Transfer 40, 1923–1935 (1997).

Taitel, Y., Dukler, A. E., *A Model for Predicting Flow Regime Transitions in Horizontal and Near Horizontal Gas-Liquid Flow*. AIChE J. 22, No.1, 47-55 (1976a).

Taitel, Y., Dukler, A.E., *A theoretical approach to the Lockhart-Martinelli correlation for stratified flow*. Int. J. Multiphase Flow 2, 591–595 (1976b).

Tzotzi, C., Bontozoglou, V., Vlachogiannis, M., Andritsos, N., *Effect of fluid properties on flow patterns in two-phase gas–liquid flow in horizontal and downward pipes*. Ind. Eng. Chem. Res. 50, 645–655 (2011).

Totzi, C. e Andritsos, N., *Interfacial shear stress in wavy stratified gas–liquid flow in horizontal pipes*. Int. J. Multiphase Flow 54, 43-54 (2013).

Ullmann, A., Zamir, M., Gat, S., and Brauner, N., *Multi-holdups in co-current stratified flow in inclined tubes*. Int. J. Multiphase Flow, 29, 1565–1581 (2003).

Vlachos, N.A., Paras, S.V., Karabelas, A.J., *Prediction of holdup, axial pressure gradient and wall shear stress in wavy stratified and stratified/atomization gas–liquid flow*. Int. J. Multiphase Flow 25, 365–376 (1999).

Von Kármán, T., *Some remarks on the statistical theory of turbulence*, Proc. 5 th Int. Congr. Appl. Mech., Cambridge, MA, 347 (1938).

White, F. M., *Viscous fluid flow*. 2 ed. New York, McGraw-Hill (1974).

Xiao, J. J. e Shoham, U., *Evaluation of Interfacial Friction Factor Prediction Methods for Gas/Liquid Stratified Flow*. SPE-22765 (1991).

Apêndice A – Dedução da lei de parede adimensional

Neste apêndice será demonstrada a dedução para a forma adimensional da lei de parede, que em sua forma dimensional é:

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{u_\tau}{v} y \right) + C \quad (\text{A.8.1})$$

Os adimensionais das variáveis presentes na equação escolhidos são:

$$u_a = u/u_{SG} \quad (\text{A.2})$$

$$y_a = y/r \quad (\text{A.3})$$

$$h_a = h/r \quad (\text{A.4})$$

$$d_a = \frac{(h+h_m)}{r} \quad (\text{A.5})$$

Aplicando essas definições à equação (A.8.2), obtemos:

$$u_a = \frac{u}{u_{SG}} = \frac{u_\tau}{u_{SG}} \cdot \frac{1}{\kappa} \ln \left(y_a \cdot \frac{u_\tau}{v} \cdot r \cdot \frac{u_{SG}}{u_{SG}} \right) + \frac{u_\tau}{u_{SG}} C \quad (\text{A.6})$$

Rearranjando e definindo um número de Reynolds, encontramos a equação adimensionalizada:

$$u_a = \frac{u_\tau}{\kappa u_{SG}} \ln \left(\frac{Re u_\tau}{u_{SG}} y_a \right) + \frac{u_\tau}{u_{SG}} C \quad (\text{A.7})$$

$$Re = \frac{r u_{SG}}{v} \quad (\text{A.8})$$

Apêndice B – Dedução da conservação de massa adimensional

Neste apêndice será demonstrada a dedução para a forma adimensional da equação de conservação de massa.

$$Q_G = \int u \cdot dA \quad (B.1)$$

Como já desenvolvido anteriormente, o perfil de velocidades do gás é dividido em duas leis de parede, tornando a equação (B.1) a soma de duas integrais de área. Essa soma apresenta a forma dimensional:

$$Q_G = \int_h^{(h+h_m)} 2u_l \sqrt{r^2 - (y-r)^2} dy + \int_0^{D-(h+h_m)} 2u_s \sqrt{r^2 - (r-y)^2} dy \quad (B.2)$$

Os adimensionais das variáveis presentes na equação escolhidos são:

$$u_a = u/u_{SG} \quad (B.3)$$

$$y_a = y/r \quad (B.4)$$

$$h_a = h/r \quad (B.5)$$

$$d_a = \frac{(h+h_m)}{r} \quad (B.6)$$

Aplicando essas definições à equação (B.2), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{Q_G}{r^2 u_{SG}} = \frac{1}{r^2 u_{SG}} \left\{ \int_{h/r}^{(h+h_m)/r} 2 \cdot u_{la} \cdot u_{SG} \cdot \sqrt{r^2 - (y_a \cdot r - r)^2} \cdot r \cdot dy_a + \right. \\ \left. \int_0^{(D-(h+h_m))/r} 2 \cdot u_{sa} \cdot u_{SG} \cdot \sqrt{r^2 - (r - y_a \cdot r)^2} \cdot r \cdot dy_a \right\} \quad (B.7) \end{aligned}$$

Simplificando e rearranjando a equação (B.7), obtém-se:

$$\frac{Q_G}{r^2 u_{SG}} = \int_{h_a}^{d_a} 2 u_{la} \sqrt{1 - (y_a - 1)^2} dy_a + \int_0^{2-d_a} 2 u_{sa} \sqrt{1 - (1 - y_a)^2} dy_a \quad (B.8)$$

Apêndice C – Dedução da equação do fator de atrito para tubulações

Neste apêndice será demonstrada a dedução completa da equação para o fator de atrito em tubulações partindo da equação adimensionalizada da conservação de massa:

$$\frac{Q_G}{r^2 u_{SG}} = \int_{h_a}^{d_a} 2 u_{Ia} \sqrt{1 - (y_a - 1)^2} dy_a + \int_0^{2-d_a} 2 u_{Sa} \sqrt{1 - (1 - y_a)^2} dy_a \quad (C.1)$$

Para realizar as integrais, precisamos substituir os perfis de velocidade na equação acima. Para isso, utilizaremos a lei de parede adimensional:

$$u_a = \frac{u_\tau}{Ku_{SG}} \ln \left(\frac{Re u_\tau}{u_{SG}} y_a \right) + \frac{u_\tau}{u_{SG}} C \quad (C.2)$$

Substituindo (C.2) em (C.1), para ambos os perfis inferior e superior, obtém-se a equação (C.3):

$$\begin{aligned} \frac{Q_G}{r^2 u_{SG}} = & \int_{h_a}^{d_a} 2 \left[\frac{u_{\tau i}}{Ku_{SG}} \ln \left(\frac{Re u_{\tau i}}{u_{SG}} y_a \right) \right] \sqrt{1 - (y_a - 1)^2} dy_a & \left. \vphantom{\int_{h_a}^{d_a}} \right\} & \text{Integral IA} \\ & + \int_{h_a}^{d_a} 2 \frac{u_{\tau i}}{u_{SG}} C \sqrt{1 - (y_a - 1)^2} dy_a & \left. \vphantom{\int_{h_a}^{d_a}} \right\} & \text{Integral IB} \\ & + \int_0^{2-d_a} 2 \left[\frac{u_{\tau s}}{Ku_{SG}} \ln \left(\frac{Re u_{\tau s}}{u_{SG}} y_a \right) \right] \sqrt{1 - (1 - y_a)^2} dy_a & \left. \vphantom{\int_0^{2-d_a}} \right\} & \text{Integral IIA} \\ & + \int_0^{2-d_a} 2 \frac{u_{\tau s}}{u_{SG}} C \sqrt{1 - (1 - y_a)^2} dy_a & \left. \vphantom{\int_0^{2-d_a}} \right\} & \text{Integral IIB} \end{aligned}$$

Resolveremos as integrais separadamente por partes. A integral IA resulta na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} I(A) = & \frac{u_{\tau i}}{9Ku_{SG}} \left[-8y_a \sqrt{2y_a} \cdot F \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \frac{5}{2}, \frac{5}{2}; \frac{y_a}{2} \right] + 9 \ln \left(\frac{Re u_{\tau i}}{u_{SG}} y_a \right) \left((y_a - 1) \sqrt{y_a(2 - y_a)} + \right. \right. \\ & \left. \left. 2 \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{y_a}{2}} \right) \right) \right] \quad (C.4) \end{aligned}$$

No resultado da integral surge uma função hipergeométrica generalizada. Contudo, analisando os valores dessa função para o intervalo de variação do y_a adimensional ($0 \leq y_a \leq 2$), podemos realizar uma simplificação para 1. Aplicando agora os limites da integral:

$$I(A) = \frac{u_{\tau i}}{9Ku_{SG}} \left[-8d_a \sqrt{2d_a} + 9 \ln \left(\frac{\text{Re } u_{\tau i}}{u_{SG}} d_a \right) \left((d_a - 1) \sqrt{d_a(2 - d_a)} + 2 \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{d_a}{2}} \right) \right) + 8h_a \sqrt{2h_a} + 9 \ln \left(\frac{\text{Re } u_{\tau i}}{u_{SG}} h_a \right) \left((h_a - 1) \sqrt{h_a(2 - h_a)} + 2 \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{h_a}{2}} \right) \right) \right] \quad (C.5)$$

A integral IB resulta na seguinte expressão:

$$I(B) = \frac{u_{\tau i}}{u_{SG}} C[(y_a - 1) \sqrt{1 - (y_a - 1)^2} + \sin^{-1}(y_a - 1)] \quad (C.6)$$

Aplicando os limites:

$$I(B) = \frac{u_{\tau i}}{u_{SG}} C[(d_a - 1) \sqrt{1 - (d_a - 1)^2} + \sin^{-1}(d_a - 1) - (h_a - 1) \sqrt{1 - (h_a - 1)^2} - \sin^{-1}(h_a - 1)] \quad (C.7)$$

A integral IIA resulta na seguinte expressão:

$$II(A) = \frac{u_{\tau s}}{9Ku_{SG}} \left[-8y_a \sqrt{2y_a} \cdot F \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{y_a}{2} \right] + 9 \ln \left(\frac{\text{Re } u_{\tau s}}{u_{SG}} y_a \right) \left((y_a - 1) \sqrt{y_a(2 - y_a)} + 2 \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{y_a}{2}} \right) \right) \right] \quad (C.8)$$

Novamente podemos ver o surgimento da função hipergeométrica. Similarmente ao realizado anteriormente, fazemos nova simplificação para então aplicar os limites da integral:

$$I(A) = \frac{u_{\tau s}}{9Ku_{SG}} \left[-8(2 - d_a) \sqrt{2(2 - d_a)} + 9 \ln \left(\frac{\text{Re } u_{\tau s}}{u_{SG}} (2 - d_a) \right) \left((1 - d_a) \sqrt{d_a(2 - d_a)} + 2 \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{(2 - d_a)}{2}} \right) \right) \right] \quad (C.9)$$

A integral IIB resulta na seguinte expressão:

$$II(B) = -\frac{u_{\tau s}}{u_{SG}} C[(y_a - 1) \sqrt{1 - (y_a - 1)^2} + \sin^{-1}(y_a - 1)] \quad (C.10)$$

Aplicando os limites:

$$II(B) = -\frac{u_{\tau s}}{u_{SG}} C \left[(d_a - 1) \sqrt{1 - (d_a - 1)^2} + \sin^{-1}(d_a - 1) - \frac{\pi}{2} \right] \quad (C.11)$$

Substituindo esses resultados na equação (C.3) e rearranjando o resultado, obtemos a equação final:

$$\begin{aligned} \frac{Q_G}{r^2 u_{SG}} = & u_{\tau s} \left\{ \frac{1}{9Ku_{SG}} \left[9 \ln \left(\frac{Re u_{\tau s}}{u_{SG}} (2 - d_a) \right) \left((1 - d_a) \sqrt{2d_a - d_a^2} + 2 \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{(2-d_a)}}{\sqrt{2}} \right) \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. 8\sqrt{2(2-d_a)^2} \right] + \frac{C}{u_{SG}} \left(\frac{\pi}{2} - D3 \right) \right\} + u_{\tau i} \left\{ \frac{1}{9Ku_{SG}} \left[9 \ln \left[\left(\frac{Re u_{\tau i}}{u_{SG}} \right)^{D1-D2} \frac{d_a^{D1}}{h_a^{D2}} \right] + 8\sqrt{2} \left(h_a^{3/2} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. d_a^{3/2} \right) \right] + \frac{C}{u_{SG}} (D3 - D4) \right\} \end{aligned} \quad (C.12)$$

$$D1 = (d_a - 1) \sqrt{2d_a - d_a^2} + 2 \sin^{-1} \left(\sqrt{d_a/2} \right) \quad (C.13)$$

$$D2 = (h_a - 1) \sqrt{2h_a - h_a^2} + 2 \sin^{-1} \left(\sqrt{h_a/2} \right) \quad (C.14)$$

$$D3 = (d_a - 1) \sqrt{2d_a - d_a^2} + \sin^{-1}(d_a - 1) \quad (C.15)$$

$$D4 = (h_a - 1) \sqrt{2h_a - h_a^2} + 2 \sin^{-1}(h_a - 1) \quad (C.16)$$

Apêndice D – Dados de Perda de Carga

Os dados retirados de Badie *et al* (2000) e os dados calculados a partir do modelo apresentado estão expostos nas tabelas abaixo para os casos água-ar e óleo-ar.

Tabela D.1 – Dados experimentais utilizados para os cálculos de perda de pressão em escoamento água-ar.

U_{SL}	U_{sg}	dP experimental	dP calculado	$(dP)_{calculado} + (dP)_{ondas}$
0.001	15.18	30	33.75	34.54
0.002	15.02	22.54	33.96	35.30
0.005	15.37	26.43	34.64	37.50
0.01	15.09	22.25	35.74	40.51
0.015	15.01	31.57	36.80	43.39
0.02	15.04	34.04	37.85	46.22
0.025	15.02	43.48	38.89	48.94
0.03	15.45	46.97	41.90	54.75
0.035	15.29	45.47	42.22	56.41
0.04	15.06	45.6	42.19	57.39
0.045	14.76	43.79	41.83	57.67
0.049	15.4	41.77	45.57	65.06
0.001	20.39	54	58.55	60.65
0.002	20.07	47.15	57.17	60.57
0.005	19.89	49.13	57.11	63.83
0.011	19.69	60.23	57.75	69.90
0.015	20.23	76.65	61.65	78.66
0.02	20.22	84.9	62.95	84.42
0.025	19.68	86.45	61.40	85.09
0.03	19.8	89.11	63.33	91.45
0.035	20.1	91.95	66.25	99.83
0.04	20.2	100.67	68.09	106.30
0.045	20.12	100.97	68.93	110.69

U_{SL}	U_{sg}	dP experimental	dP calculado	$(dP)_{calculado} + (dP)_{ondas}$
0.05	20.09	115.72	70.03	115.56
0.001	24.77	90.25	83.04	86.99
0.003	25.25	93.92	86.60	96.37
0.005	24.6	115.6	83.33	96.68
0.01	25.27	138.4	89.12	114.20
0.015	24.77	148.23	87.68	120.19
0.02	25.02	169.02	90.86	133.20
0.025	24.85	177.17	91.39	141.10
0.03	24.9	190.9	93.28	151.43
0.035	25.03	204.28	95.68	162.89
0.04	25.12	215.22	97.82	173.85
0.045	25.03	228.52	98.78	181.82

Tabela D.2 – Dados experimentais utilizados para os cálculos de perda de pressão em escoamento óleo-ar.

U_{SL}	U_{sg}	dP experimental	dP calculado	$(dP)_{calculado} + (dP)_{ondas}$
0.001	15.01	30	33.87	39.17
0.003	15.36	64.93	35.95	49.35
0.005	15.05	76.68	35.30	54.10
0.008	15.09	83.87	36.39	64.02
0.01	14.86	101.38	36.04	67.58
0.015	14.99	103.95	38.06	83.40
0.02	15.37	114.19	41.17	103.72
0.025	15.36	124.07	42.59	118.15
0.03	14.88	137.14	41.85	122.04
0.034	14.99	147.34	43.47	135.12
0.001	19.58	54	54.54	67.04
0.003	19.91	117.57	56.99	87.88
0.005	19.59	131.51	56.16	99.93

u_{SL}	u_{sg}	dP experimental	dP calculado	$(dP)_{calculado} +$ $(dP)_{ondas}$
0.008	20.45	145.35	61.79	134.78
0.01	19.7	165.88	58.64	136.15
0.015	20.02	172.98	63.16	177.92
0.02	19.75	190.37	62.61	200.68
0.025	19.75	209.03	64.42	231.04
0.03	20.05	230.99	70.38	279.79
0.001	25.27	90.25	86.20	114.73
0.003	24.51	189.26	82.53	142.89
0.005	25.1	207.13	87.07	184.21
0.008	24.76	250.06	86.40	221.17
0.01	24.54	273.34	85.98	242.49
0.015	24.78	302.18	89.73	313.75
0.02	25.01	324.18	93.43	385.49
0.025	24.97	356.93	95.39	445.16
0.03	24.98	380.16	97.64	505.88

Apêndice E – Código Matlab

Código para o cálculo do fator de atrito interfacial em tubulações.

```
global i Qg d H ug k C r Re Reg fs uts vg usg

k = 0.41;
C = 5;
vg =
Diam = [];
Vazgas = [];
Vazliq = [];
Had = [];

for s=2
    d = Diam(s);
    r = d/2;
    for t=1
        Qg = Vazgas(t);
        for v=1:10
            Ql = Vazliq(v);

            for j=1:n
                H(j)=Had(j)*d;
                Al = r^2*acos((r-(d-H(j)))/r)-(r-(d-H(j)))*sqrt(2*r*(d-
H(j))-(d-H(j))^2);
                Ag = pi*r^2 - Al;
                ug(j)=Qg/Ag;
                ul(j)=Ql/Al;
            end

            usg = Qg/(Ag+Al);
            usl = Ql/(Ag+Al);
            Re = usg*r/vg;

            for i=1:n
                Reg = ug(i)*H(i)/vg;
                fs = 0.046/(Reg^0.25);
                uts = (fs*(ug(i)^2)/2)^0.5;
                fun =@ myfun;
                x0 = [uts/20, H(i)/10];
                lb = [uts/20; H(i)/10];
                ub = [uts*20 ; H(i)*5];
                options.MaxFunEvals = 1000;
                x = lsqnonlin(fun,x0,lb,ub,options);

                Fi(v,i) = (2*(x(1))^2)/((ug(i)-ul(i))^2);
                Hm(i) = x(2);
            end
        end
    end;
end
```

```

function F = myfun(x)

global i Qg d H k C r Re uts usg

h = d - H(i);
ha = h/r;
e =0;

da = (h+x(2))/r;
D1 = (da-1)*sqrt(2*da-da^2)+2*asin(sqrt(da/2));
D2 = (ha-1)*sqrt(2*ha-ha^2)+2*asin(sqrt(ha/2));
D = D1-D2;
D3 = (da-1)*sqrt(2*da-da^2)+asin(da-1);
D4 = (ha-1)*sqrt(2*ha-ha^2)+asin(ha-1);
A=((x(1)*Re/(1+e/d)*usg)^D)*(da^D1)/(ha^D2);
B = uts*Re*(2-da)/usg;

F = [(-Qg/(r^2*usg) + (uts*( (9*log(B)*((1-da)*sqrt(2*da-da^2) +
2*asin(sqrt((2-da)/2))) ...
- 8*sqrt(2*(2-da)^3))/(9*k*usg) + C/usg*(pi/2 - D3)))+ x(1)*(
(8*sqrt(2)*(ha^(1.5)-da^(1.5)) + 9*log(A))/(9*k*usg) + C*(D3-D4)/usg));
+x(1)*log(Re*x(2)*x(1)/(usg*r))+x(1)*C - uts*log(Re*uts*(d-h-
x(2))/(r*usg)) - uts*C];

end

```